INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

Projet galaad

Géométrie, Algèbre, Algorithmes

Sophia Antipolis

THÈME 2B

Rapport d'Activité

2002

Table des matières

1. Composition de l'équipe

Responsable scientifique
Bernard Mourrain [CR1 Inria]

Responsable permanent
Monique Teillaud [CR1 Inria]

Personnel Inria
Ioannis Emiris [CR1, Inria (jusqu'au 1er Octobre)]

Personnel UNSA
Mohamed Elkadi [Maître de Conférence]
André Galligo [Professeur]
Michel Merle [Professeur, à 20% dans le projet]

Assistante du projet
Aurélie Richard

Chercheurs doctorants
Guillaume Chèze [boursier MESR]
Jean-Pascal Pavone [boursier INRIA]
Olivier Ruatta [boursier MESR, jusqu'au 30 septembre]
Jean-Pierre Técourt [boursier MESR, à partir du 1er septembre]
Philippe Trébuchet [boursier MESR, jusqu'au 20 décembre]

Professeur invité
Alicia Dickenstein [Professeur, Univ. de Buenos Aires, Argentine, du 1er au 15 septembre]

Post-Doctorants
Laurent Busé [UNSA, jusqu'au 31 décembre 2002]
Gabriel Dos Reis [INRIA, à partir du 1er septembre]
Carlos D'Andrea [INRIA, jusqu'au 4 mars]
Antoine Marin [INRIA, à partir du 1er octobre]

Collaborateur extérieur
Pierre Comon [DR, CNRS-I3S]

Stagiaires
Hironmay Basu [IIT Kharagpur, du 13 mai au 19 juillet]
Pierre Bel [Magistère Cachan, 20 juin - 31 juillet, 23 août - 6 septembre]
Sebastien Bis [DEA de Nice, du 1 avril au 30 juin]
Grégory Gatellier [DEA d'algorithmique Paris 6, du 1 avril au 30 juin]
Paul Palackel [IIT Dehli, du 13 mai au 15 juillet]
Daniel Perrucci [Univ. de Buenos Aires, du 2 au 30 septembre]
Simon Plumecoq [ESSI, du 15 juin au 15 septembre]
Jean-Pierre Técourt [DEA de Limoges, du 1 avril au 30 juin]
Adrien Sales [DEA de Nice, du 1 avril au 30 juin]

2. Présentation et objectifs généraux

Notre programme de recherche s'articule autour de la géométrie algébrique effective et de ses applications. Notre objectif est de développer des méthodes algorithmiques permettant de résoudre efficacement et de manière fiable les problèmes géométriques et algébriques, rencontrés dans des domaines tels que la CAO, la robotique, la vision par ordinateur, la biologie moléculaire,.... Nous nous intéressons à l'analyse de ces méthodes tant du point de vue de la complexité arithmétique que des aspects qualitatifs, des interactions entre le calcul symbolique et le calcul numérique.

La géométrie est un des thèmes fédérateurs de notre activité. Ce thème inclut la géométrie algébrique effective, la géométrie discrète et combinatoire ou encore la géométrie algorithmique des objets semi-algébriques ainsi que des relations avec la géométrie différentielle. Nous nous intéressons plus spécifiquement aux problèmes (intersection, singularité, topologie) en petites dimensions, et considérons avec attention les questions liées aux courbes et surfaces algébriques.

L'algèbre et plus particulièrement les problèmes de résolution sont également au centre de nos préoccupations. Ils apparaissent dès l'origine des mathématiques et ont évolué sous des formes très diverses. Nous nous intéressons à la conception et à l'analyse de méthodes permettant de traiter ces problèmes sur ordinateur et à leurs aspects algorithmiques. Constituants de ce qui est appelé la géométrie algébrique effective, ces développements sont centraux et souvent critiques dans beaucoup de problèmes concrets.

Les calculs numériques approchés, souvent opposés aux calculs formels, et les problèmes de certification sont également au cœur de notre démarche. Nous voulons explorer ces liens entre la géométrie, l'algèbre et l'analyse, qui connaissent actuellement un essor important. Les objectifs sont à la fois théoriques et pratiques, avec le développement de méthodes permettant de contrôler, vérifier et certifier les résultats et leurs utilisations dans des problèmes où les données sont connues avec une précision limitée.

Enfin ces travaux sont accompagnés de développements logiciels. Une attention particulière est donnée aux problèmes de généricité, de modularité et d'efficacité, propres à l'écriture de codes algébriques et géométriques. Les applications et la validation de ces outils dans des domaines spécifiques forment également une composante importante de notre activité.

3. Fondements scientifiques

3.1. Introduction

Notre activité scientifique se décline suivant trois grands thèmes : la géométrie, la résolution des systèmes d'équations algébriques et les liens symbolique-numérique.

3.2. Géométrie

3.2.1. Géométrie des variétés algébriques

Afin de pouvoir résoudre efficacement un problème algébrique, il est important de bien analyser la géométrie de ses solutions. De cette étude, nous pourrons alors déduire la méthode de résolution la mieux adaptée et ainsi produire un solveur efficace, dédié à cette classe de systèmes. La géométrie algébrique effective nous fournit des outils d'analyse permettant de comprendre la géométrie de ces variétés algébriques. Nous les utilisons par exemple pour développer de nouvelles formulations de résultants permettant de produire des solveurs basés sur des outils d'algèbre linéaire et adaptés aux solutions que l'on cherche à approcher.

3.2.2. Géométrie discrète

Nous nous intéressons ici aux propriétés des solutions d'équations polynomiales, qui se déduisent de la géométrie des monômes apparaissant dans les équations, et basée sur le polytope de Newton associé à chaque polynôme. Cette *théorie de l'élimination torique (ou creuse),* introduite dans les années 1970 par l'équipe de I. Gelfand [60] offre des bornes plus précises sur le nombre de racines communes et le degré du résultant, ainsi que des algorithmes plus efficaces pour les systèmes polynomiaux creux. Elle établit des ponts algorithmiques entre la géométrie des points à coordonnées entières (qui représentent des monômes) et la géométrie algébrique effective, et plus particulièrement les résultants.

3.2.3. Algorithmes géométriques pour les arcs de courbes et carreaux de surfaces

Les outils de géométrie algébrique effective mentionnés ci-dessus permettent d'analyser en détail mais isolément les variétés algébriques. A l'opposé, la géométrie algorithmique classique traite des problèmes où les données sont des objets linéaires (points, segments, droites) mais apparaissant en très grand nombre. Fusionnant ces deux démarches, nous nous penchons ici sur des problèmes où interviennent des collections d'objets algébriques définis par morceaux. Les propriétés mathématiques de ces structures géométriques, lorsque les données sont ces objets, sont encore mal connues et les algorithmes habituels de la géométrie algorithmique ne se généralisent pas toujours au cas d'objets courbes.

3.2.4. *Géométrie, groupes et invariants*

Les objets que l'on est amené à manipuler dans les problèmes géométriques sont souvent des points, des droites, des sphères,... et les grandeurs qui décrivent les propriétés de ces objets sont, par nature, indépendants du repère que l'on choisit pour calculer ces grandeurs. Le groupe des changements de repères laisse invariantes ces quantités géométriques. Nous nous intéressons ici au traitement symbolique de ces objets géométriques exploitant les invariants et permettant une représentation plus synthétique des expressions manipulées.

3.2.5. *Géométrie des singularités et topologie*

L'analyse des singularités d'un ensemble (semi)-algébrique permet de mieux comprendre sa structure et donc de mieux l'appréhender ou l'approcher. Nous nous intéressons en particulier aux applications de la théorie des singularités aux cas de courbes silhouettes, d'ombres, d'ombres portées, de courbes déplacées, de médiatrices de courbes, d'ensemble d'auto-intersections apparaissant dans des problèmes algorithmiques issus de la CAO, ou de l'analyse de formes.

3.3. Résolution des systèmes d'équations algébriques

3.3.1. *Méthodes algébriques et structure quotient*

L'approche algébrique que nous suivons consiste à analyser et utiliser la structure du quotient des polynômes en n variables modulo les équations que l'on cherche à résoudre, afin d'en déduire la géométrie des solutions de ce système. Ceci soulève des questions de représentation et de calcul de formes normales dans de telles structures. Des réflexions sur les problèmes numériques et algébriques apparaissant dans ce contexte nous conduisent à étudier de nouvelles approches du calcul de forme normale, généralisant les célèbres bases de Gröbner, à la frontière entre le calcul symbolique et numérique.

3.3.2. *Dualité, résidus, interpolation*

Nous nous intéressons ici à l'utilisation « effective » de la dualité, c'est-à-dire aux propriétés des formes linéaires sur les polynômes ou sur le quotient de l'anneaux des polynômes par un idéal. Nous avons entrepris une étude détaillée de ces outils d'un point de vue algorithmique, permettant de répondre à des questions de base en géométrie algébrique, tout en nous permettant d'améliorer de manière substantielle la complexité de résolution de ces problèmes. Nous nous intéressons en particulier au calcul effectif du résidu algébrique, à des problèmes d'interpolation et aux relations entre coefficients et racines dans le cas de polynômes en plusieurs variables.

3.3.3. *Algèbre linéaire structurée et polynômes*

Les travaux précédents conduisent naturellement à la théorie des matrices structurées. En effet, les matrices issues de problèmes polynomiaux comme les matrices de résultants ou les Bézoutiens, sont structurées. Leurs lignes et colonnes sont naturellement indexées par des monômes (ou points à coordonnées entières), et leurs structures généralisent celles des matrices de Toeplitz au cas multivariable. Nous nous intéressons à des algorithmes exploitant leurs propriétés et à leurs implications dans la résolution d'équations polynomiales [10].

3.3.4. *Décomposition et factorisation*

Lorsque l'on dispose d'un système d'équations à résoudre, un premier traitement à réaliser est de le transformer si possible en plusieurs sous-systèmes plus simples. Nous nous intéressons ici à de nouveaux types d'algorithmes combinant des aspects numériques et formels, plus efficaces mais également fiables. Le problème (difficile) de factorisation approchée, c'est-à-dire du calcul de perturbations des données permettant de décomposer le problème est également étudié. Plus généralement, nous nous intéressons au problème de décomposition d’une variété en composantes irréductibles, dans le cadre le plus riche (c’est-à-dire sur le corps des nombres complexes).

3.3.5. Déformation et homotopie

Le comportement d’un problème dans un voisinage d’une donnée peut s’interpréter en termes de déformations. Dans cette optique, les méthodes d’homotopie consistent à introduire un nouveau paramètre et à suivre l’évolution des solutions entre une position connue et la configuration que l’on cherche à résoudre. Ce paramètre peut aussi être introduit de manière symbolique, comme dans les techniques de perturbation de situations non-génériques. Nous nous intéressons à ces méthodes en vue de les utiliser dans la résolution d’équations polynomiales ainsi que dans de nouveaux algorithmes de factorisation approchée.

3.4. Liens symbolique-numérique

3.4.1. Certification

Les problèmes numériques sont souvent abordés d’un point de vue local. Or dans beaucoup de problèmes, il est important de donner des réponses globales, permettant de certifier les calculs qui sont faits. L’approche symbolique/numérique que nous suivons combine à la fois des aspects algébriques et analytiques, destinés à pouvoir répondre à ces problèmes. Nous nous intéressons en particulier à la certification de prédicats géométriques essentiels à la cohérence topologique des structures géométriques calculées [59].

3.4.2. Approximation

L’enchaînement de constructions géométriques, si celles-ci sont traitées de manière exacte, conduit souvent à une complexification rapide des problèmes. Il est alors important de pouvoir approcher ces objets tout en contrôlant la qualité d’approximation. Que ce soit en vue d’approcher une surface par un ensemble de triangles respectant sa topologie ou pour construire une approximation du diagramme de Voronoï d’un ensemble d’arcs de courbes, ce problème combine à la fois des aspects géométriques, algébriques et algorithmiques.

3.4.3. Dégénérescence et arithmétique

Les problèmes de singularités obéissent d’après un ingénieur en CAO, à la règle suivante : moins de 20% des cas traités sont singuliers, mais plus de 80% du temps est nécessaire pour développer un code permettant de les traiter correctement. Les dégénérescences sont donc critiques aussi bien du point de vue théorique que du point de vue de la gestion logicielle. Pour remédier à ces difficultés, à côté des études qualitatives et des classifications, nous étudions des méthodes de *perturbations* symboliques ou explicites, ou basées sur une arithmétique exacte mais adaptative. Nous travaillons, par exemple pour le calcul du signe d’expressions, sur des approches combinant des calculs modulaires et approchés, qui allient rapidité et exactitude de la réponse [44].

4. Domaines d’application

4.1. Introduction

Nous regroupons nos domaines applicatifs en plusieurs pôles. Le premier (la Conception Assistée par Ordinateur) est celui que nous mettons en avant. La deuxième catégorie concerne des thèmes dans lesquels nous nous impliquons en vue de transferts directs de nos méthodes. La dernière catégorie concerne des domaines dans lesquels nous menons une activité prospective.

4.2. CAO

Mots clés : *modélisation géométrique, ingénierie assistée par ordinateur*.

La modélisation 3D nous est de plus en plus familière (images de synthèse, architecture, vision par ordinateur, internet, ...). Les objets mathématiques sous-jacents sont souvent de nature algébrique (recollement de courbes et surfaces rationnelles), ceux-ci étant ensuite discrétisés afin de les visualiser ou de les manipuler. De tels objets peuvent ainsi être utilisés dans des processus parfois très complexes nécessitant par exemple des calculs d'intersections ou d'isosurfaces (CSG, simulations numériques, ...). Nous nous proposons de développer des méthodes prenant en compte les spécificités algébriques de ces problèmes. Nous aborderons ces questions dont la réponse dépend fortement du contexte ou de l'application envisagée, en relation directe avec les contacts industriels de la CAO que nous avons. Plus généralement, nous nous intéressons à l'analyse et au traitement des formes à l'aide d'outils de la géométrie.

4.3. Vision et robotique

Mots clés : *ingénierie*, *reconstruction*, *étalonnage*.

La robotique et la vision sont des domaines privilégiés d'applications des méthodes de résolution d'équations polynomiales. Que se soit pour l'étalonnage de caméras, de robots, le calcul de configurations, d'espace de travail, la résolution de problèmes algébriques avec des coefficients approchées est omniprésente.

4.4. Applications prospectives

Mots clés : *biologie*, *santé*, *télécommunications*, *identification*.

4.4.1. Biologie moléculaire et structures géométriques

La biologie moléculaire est un domaine potentiel d'applications de nos méthodes. Les propriétés chimiques de molécules intervenant dans certains médicaments sont liées aux configurations (ou conformations) qu'elles peuvent prendre. Ces molécules sont vues comme des mécanismes de barres et de sphères, autorisant des rotations autour de certaines liaisons, semblables à des robots séries. La *géométrie des distances* y joue ainsi un rôle important comme dans par exemple pour la reconstruction en RMN, ou dans l'analyse de configurations réalisables ou accessibles.

4.4.2. Traitement du signal

En traitement du signal, des problèmes d'identification « aveugle » des sources d'un signal conduisent à la résolution d'équations algébriques. Les coefficients se déduisent de mesures ou d'observations et sont donc par nature entachés d'erreur. Des méthodes de résolution prenant en compte ces données approchées doivent donc être utilisées. Nous nous intéressons ici aux applications directes de nos méthodes et à leur validation expérimentale.

5. Logiciels

5.1. synaps : Un noyau pour le calcul symbolique et numérique

Participants : Guillaume Chèze, Ioannis Emiris, Gabriel Dos Reis, Bernard Mourrain [correspondant], Jean-Pascal Pavone, Olivier Ruatta, Jean-Pierre Técourt, Monique Teillaud, Philippe Trébuchet.

Mots clés : *algèbre linéaire*, *bézoutien*, *C++*, *FFT*, *généricité*, *géométrie algébrique effective*, *lien symbolique-numérique*, *géométrie*, *courbes et surfacs*, *matrice creuse*, *matrice structurée*, *méthode itérative*, *polynômes*, *résolution*, *résultant*, *stabilité*, *valeur propre*.

Bibliothèque SYNAPS.

Les problèmes que nous rencontrons font appel à la fois à des méthodes manipulant des polynômes, des idéaux, des anneaux quotients,... mais aussi à des calculs numériques sur des vecteurs, des matrices, dans des processus itératifs. Ces domaines étaient jusqu'à présent bien séparés, d'un côté des logiciels manipulant des formules, souvent peu efficaces pour l'algèbre linéaire numérique, de l'autre coté des outils numériquement stables et efficaces en algèbre linéaire mais peu adaptés au traitement des polynômes.

L'objectif que nous poursuivons dans la conception du logiciel SYNAPS (SYmbolic Numeric APplicationS) est de fournir un noyau performant, dédié aux calculs symboliques et numériques pour les polynômes, en vue d'applications.

Cette bibliothèque comprend un ensemble de structures et de fonctions permettant de manipuler des vecteurs, des matrices, des polynômes en une ou plusieurs variables. Des outils spécialisés tels que LAPACK, GMP, SUPERLU, RS, GB, ... y sont également connectés et peuvent y être utilisés de manière transparente. Une attention particulière a été apportée à la généricité des structures sans pour autant perdre en efficacité. Pour cela, nous avons distingué plusieurs niveaux d’implantation. Le premier niveau concerne les conteneurs qui sont des objets mémorisant les données nécessaires au calcul de manière à optimiser les opérations. Le deuxième niveau concerne les vues (vecteur, polynômes, ...) que l’on veut donner à ces conteneurs et les méthodes qui s’y rattachent. Enfin un troisième niveau, correspondant à des modules, regroupent les implémentations génériques associées à une catégorie d’objets et leurs spécialisations. Nous nous basons pour ces développements, sur le langage C++ qui, grâce à la paramétrisation du code (*template*) et au contrôle de leurs instantiations (*traits, expression template*), offre la généricité indispensable dans ce contexte sans perdre en efficacité.

Un module dédié aux courbes et surfaces y est développé en relation avec la bibliothèque CGAL (Geometric Algorithms Library www.cgal.org). Nous nous attachons à fournir des fonctionnalités liées aux objets courbes, à la fois pour le noyau (classes d’objets de base munis de prédicats et constructions) et la *basic library* (classes de structures géométriques complexes telles que les diagrammes de Voronoï).

Nous développons également des outils liés aux problèmes d’intersection de courbes et surfaces, de singularités, et d’auto-intersection s’appuyant sur les outils de résolution de la bibliothèque SYNAPS.

Un autre module lié à la factorisation est également en cours de développement, en relation avec les problèmes de séparation des composantes irréductibles d’une courbe de $\mathbb{C}^3$ (ou en dimensions plus grandes - pour le nombre de variables ou la dimension de la variété).

5.2. multires, un module pour la résolution algébrique en Maple

Participants : Laurent Busé, Ioannis Emiris, Bernard Mourrain [correspondant], Olivier Ruatta, Philippe Trébuchet.

Le logiciel MULTIRES écrit en Maple contient un ensemble de fonctions pour le traitement de problèmes de résolution d’équations polynomiales. Ces implémentations ont vocation à évoluer vers des composants logiciels performants qui seront intégrés dans la bibliothèque SYNAPS.

Mots clés : *algorithmique des polynômes, résultants, résidu, valeur propre, interpolation, algèbre linéaire*.

MULTIRES permet en particulier de construire des matrices dont le déterminant est un multiple du résultant sur une certaine variété et des algorithmes reposant sur ces formulations, pour résoudre des systèmes d’équations polynomiales. Ce module a comme premier objectif d’illustrer les différentes méthodes algébriques de résolutions. Il est ainsi utilisé dans des enseignements en France et à l’étranger : Angleterre, Argentine, ... Il contient en particulier une implantation d’outils de résolution par calcul de valeurs et vecteurs propres, des bézoutiens en plusieurs variables, de la formulation de Macaulay [63] pour le résultant projectif (ainsi que le calcul du mineur permettant de calculer exactement le résultant), de celle de Jouanolou [61] combinant des matrices de type Macaulay et de Bézout et de résultant (creux) sur une variété torique [48],[2].

Nous avons également rajouté la nouvelle construction que nous proposons pour le résultant résiduel d’une intersection complète [46], ainsi que des fonctions de calcul du degré de cette intersection résiduelle. L’algorithme de décomposition géométrique d’une variété algébrique [56] ainsi que les résolutions à partir de valeurs (ou vecteurs) propres y sont également implémentés.

On y trouve aussi la généralisation en plusieurs variables de la méthode de Weierstrass, présentée dans [66], ainsi qu’une méthode de résolution par homotopie, s’appuyant sur cette généralisation. Par ailleurs, des outils liés à la dualité sur les polynômes y ont également été implémentés, en particulier le calcul du résidu dans le cas d’une intersection complète affine générale, en dimension 0.

6. Résultats nouveaux

6.1. Résolution

6.1.1. Calcul de formes normales dans une algèbre quotient

Participants : Bernard Mourrain, Philippe Trébuchet.

Mots clés : *Polynômes*, *équations*, *résolution*, *algèbre quotient*, *calcul approchés*, *formes normales*, *valeurs et vecteurs propres*.

Coopération avec Daniel Lazard (projet SPACES*)*
Les méthodes algébriques classiques, telles que les calculs de bases de Groebner, utilisées pour résoudre les systèmes d'équations polynomiales se prêtent mal aux calculs approchés et introduisent une instabilité structurelle. Partant de ce constat, nous avons en 2000, sur la base d'un nouveau critère de formes normales [64], élaboré un algorithme permettant de calculer la structure de l'algèbre quotient de manière plus robuste numériquement. Nous avons, en 2001, développé un algorithme qui nécessitait que le système soit de dimension 0 pour fonctionner. Finalement nous avons écrit cette année un premier algorithme ne formulant aucune hypothèse sur ses entrées.

Une étude préliminaire de ce genre de méthode est donnée dans [29], où la mise en forme de certaines des idées nous permet de décrire un algorithme qui est comparable à l'algorithme F_4 [58] en termes de complexité pratique. Nous nous sommes ensuite penchés sur une méthode unifiant le précédant algorithme et celui décrit dans [].

Un prototype a été implanté en C++ en utilisant la bibliothèque SYNAPS [26]. Il s'avère que la classe d'objets calculables par cet algorithme est plus grande strictement que celle des bases de Groebner. En fait en introduisant une certaine liberté dans le déroulement des calculs, on parvient à mieux contrôler la taille des différents coefficients apparaissant en cours d'algorithme.

A l'aide de ce prototype nous avons résolu certains problèmes issus de la pharmacologie en collaboration avec Jean Marc Nuzillar. Un article est soumis.

Enfin nous étudions actuellement plusieurs voies de développement de ce prototype visant d'une part à remplacer le critère d'arrêt par un autre moins coûteux à calculer. Nous souhaiterions de manière idéale que ce nouveau critère redonne celui de Buchberger lorsque les choix que l'on fait en cours de calcul sont dictés par un ordre monomial. Nous nous attachons d'autre part à réduire le temps de calcul en supprimant certains calculs rendus maintenant redondants.

6.1.2. Méthode de Weierstrass multivariée

Participants : Bernard Mourrain, Olivier Ruatta.

Le méthode de Weierstrass (aussi appelée méthode de Durand-Kerner ou de Dochev) est une méthode itérative permettant d'approximer simultanément toutes les racines d'un polynôme univarié. Dans [66], nous donnions des formules d'interpolation permettant de proposer une fonction d'itération pour une famille de systèmes d'équations algébriques multivariées très large (intersection complète reduite de dimension 0). Nous utilisions cette fonction d'itération comme opérateur de correction dans une méthode de suivi de chemin (homotopie) et nous obtenions une méthode globale si nous rajoutions l'hypothèse que le système considéré n'avait pas de zéro à l'infini. Plus récemment [22], grâce à de nouvelles formule d'interpolation, nous avons donné une fonction d'itération dans le cas où des racines multiples peuvent apparaître. Enfin, nous avons donné une fonction d'itération dans le cas des systèmes algébriques de dimension zéro surcontraint et nous avons étudié la possibilité d'utiliser cette fonction d'itération dans une homotopie. Nous nous confrontons à des questions théoriques et pratiques du même type que celles déjà connues pour la méthode de Newton. Nous avons fait une étude géométrique qui devrait permettre de donner des algorithmes généraux et efficaces.

6.1.3. Subdivision

Participants : Bernard Mourrain, Grégory Gatellier.

La résolution de polynômes en une variable est un ingrédient de base d'un grand nombre d'opérations géométriques. Nous avons continué nos travaux sur l'isolation de racines réelles par des méthodes de subdivision, à partir des signes des coefficients du polynôme dans la base de Bernstein.

Une amélioration de l'analyse de complexité de l'algorithme permettant d'isoler les racines réelles, décrit dans [23] est apportée dans [41], en utilisant une forme de réciproque du lemme de Descartes. Cet algorithme a été implémenté dans la bibliothèque SYNAPS et se révèle particulièrement efficace sur des polynômes de degré modéré.

L'extension de cette méthode aux polynômes en deux ou trois variables a fait l'objet du stage de G. Gatellier. Nous étendons ici la représentation par des polynômes de Bernstein au cas multivariable et utilisons des conditions de signes pour contrôler la subdivision des domaines. Cette méthode a été testée avec succès sur un grand nombre de problèmes d'intersection de courbes et de surfaces.

Des optimisations de cette approche sont à l'étude pour déterminer la première racine positive d'un polynôme, ou encore pour isoler plus rapidement les racines dans le cas multivariable.

6.2. Algèbre

6.2.1. Résidu et application

Participant : Mohamed Elkadi.

Mots clés : *Bezoutien*, *résidu*, *implicitisation*, *offset*, *CAO*.

Notre dernier travail [55] sur le calcul effectif des résidus a été appliqué au traitement de certains problèmes de la CAO (implicitisation, calcul d'offsets, ...). Cette approche est basée sur les bezoutiens qui fournissent des multiples des équations cherchées ; l'utilisation du calcul résiduel permet de simplifier les facteurs indésirables dans ces équations sans avoir recours à la factorisation polynomiale.

6.2.2. Résultant et implicitisation

Participants : Sébastien Bis, Laurent Busé, Mohamed Elkadi, Bernard Mourrain.

Mots clés : *élimination*, *résultants*, *points base*.

En collaboration avec Jean-Pierre Jouanolou, ULP Strasbourg.

Le problème d'implicitation consiste à déterminer l'équation implicite d'une surface paramétrée. Il est d'une importance capitale en CAO. L'an dernier nous avions proposé une méthode, basée sur le résultant résiduel, pour impliciter une surface paramétrée dont les points base étaient supposés localement intersection complète avec degrés des générateurs bornés. Cette méthode est très efficace, mais également très restrictive par ses hypothèses ainsi que par la connaissance des points base qu'elle requiert. Nous avons donc cette année exploré d'autres pistes pour résoudre ce problème. La venue de Carlos d'Andrea dans le projet a permis d'étudier plus avant la fameuse méthode dite des "moving surfaces" introduite par T. Sederberg en 1995. Cette méthode permet d'impliciter une surface paramétrée sans point base, utilisant les syzygies de la paramétrisation. Nous avons repris cette méthode en détail, et montré comment modifier l'algorithme pour la rendre valide en la présence de points base, à la condition que ces derniers soient localement intersection complète et vérifient une condition de régularité. Dans ce travail, rédigé sous la forme d'un article [45], il a également été exhibé un exemple pour lequel cette méthode des "moving surfaces" ne peut pas fonctionner, ce qui n'avait jamais été observé auparavant.

En collaboration avec Jean-Pierre Jouanolou (ULP Strasbourg), nous avons exploré le problème d'implicitation au travers des complexes d'approximation, complexes qui permettent de calculer certaines syzygies de la paramétrisation dite éclatée. Ce travail [47] donne un nouvel algorithme pour impliciter toute hypersurface (et donc en particulier une surface) dont les points base sont isolés et localement intersection complète. C'est à ce jour l'algorithme le plus général pour résoudre ce problème, mis à part des calculs de bases de Gröbner.

Enfin le stage de S. Bis a porté sur une synthèse et une comparaison expérimentale des différentes méthodes d'implicitisation [30].

6.2.3. Résultant torique

Participants : Ioannis Emiris, Carlos D'Andrea.

Mots clés : *élimination torique, matrice du résultant, système multi-homogène, polytope de Newton, subdivision mixte.*

En collaboration avec Alicia Dickenstein, Département de Mathématiques, Université de Buenos Aires (Argentine), et Ilias Kotsireas, Université W. Laurier, Waterloo et ORCCA, London (Canada).

Le résultant torique (ou creux) est typiquement exprimé par le biais d'une matrice carrée. Le problème algorithmique qui se pose est de construire des matrices du résultant torique dont la dimension soit la plus petite possible. Pour cela, nous avons proposé des matrices hybrides, se situant entre les matrices de type Sylvester/Macaulay et celles obtenues par l'approche du Bézoutien. Plus précisément, nous avons étudié les systèmes multi-homogènes (homogènes par rapport à chacun des ensembles de variables) et nous avons décrit toutes les formules déterminantales pour leur résultant torique. Nous avons aussi proposé des formules rectangulaires de type Sylvester ou Bézout, et nous les avons caractérisées de manière combinatoire [25]. Les systèmes multi-homogènes constituent une première généralisation du cas dense homogène bien analysé, vers des systèmes arbitraires creux.

Le résultant torique permet dans beaucoup de cas d'obtenir l'équation implicite d'une surface paramétrée. Une méthode de perturbation peut traiter les cas dégénérés [49]. Une autre méthode amène le problème d'implicitisation à une question d'interpolation, qui serait accélérée par une bonne connaissance du support (c.-à-d. les monômes non-nuls) de l'équation implicite. En étudiant la subdivision mixte de la somme de Minkowski des polytopes de Newton associés aux polynômes de la paramétrisation, nous pouvons borner le support de l'équation implicite. Nous avons utilisé cet outil parallèlement à l'application des bornes sur le degré total et le degré partiel de l'équation implicite, afin de mieux approcher le support. Notre implémentation en Maple, appliquée à plusieurs exemples, a donné des résultats encourageants [35].

6.3. Géométrie

6.3.1. Autointersection

Participants : Jean-Pascal Pavone, André Galligo, Bernard Mourrain.

Dans le cadre du projet GAIA(voir section 8.3.2), nous avons développé un algorithme de calcul d'auto-intersection de surfaces paramétrées. Sa principale caractéristique est de découper la surface en parties injectives, et donc de transformer le problème d'auto-intersection en plusieurs intersections de surfaces.

Pour le moment il fonctionne pour des surfaces données en évaluation et pourra éventuellement âtre amelioré dans des situations plus favorables : représentation ou historique des constructions connus (offset, fillet, pipe, ...). Cet algorithme a été implémenté en C puis un composant COM a été construit afin de l'intégrer dans le logiciel de CAO de Think3.

6.3.2. Arrangements

Participants : Bernard Mourrain, Jean-Pierre Técourt, Monique Teillaud.

On a cherché des algorithmes permettant de calculer de manière effective l'arrangement de plusieurs quadriques. On veut obtenir une décomposition en cellules caractérisées par des conditions de signes (des polynômes définissant les quadriques) ainsi que des relations entre les différentes cellules. Deux approches ont été envisagées : la première est basée sur un principe de subdivision et l'utilisation des règles de Descartes. Seule, elle ne fournit pas exactement le résultat escompté ; on envisage de la coupler avec la deuxième approche qui consiste à analyser les changements de topologie d'une section orthogonale quand on balaie l'espace dans une direction donnée [40].

6.3.3. Classification

Participants : Laurent Busé, André Galligo.

En collaboration avec M. Stillman, Cornell University.

A. Galligo a continué, avec M. Stillman, de classifier les surfaces paramétrées bicubiques plongées dans $\mathbf{P}^3$. Des carreaux de ces surfaces sont souvent utilisés en CAO et ce travail permettra de calculer plus rapidement et plus précisément les intersections et les autointersections de ces carreaux. Un rapport interne a été rédigé qui sera plus tard intégré dans les livraisons pour GAIA(voir section 8.3.2). En relation avec ce travail, L. Busé et A. Galligo ont commencé une étude, via des résultants généralisés, de l'intersection de deux familles de courbes gauches.

6.3.4. *Géométrie différentielle*

Participant : Gabriel Dos Reis.

Certains objets géométriques, comme les courbes et les surfaces provenant de la CAO, possèdent des propriétés géométriques (par exemple ombilicité) influant de manière essentielle sur la nature des singularités qui apparaissent dans certaines opérations naturelles (surfaces parallèles). Nous nous intéressons à l'application de techniques de Géométrie Différentielle à l'étude de ces objets et au développement d'algorithmes fiables permettant de les isoler et de les traiter efficacement. Certaines surfaces apparaissent comme modèles d'interface entre deux milieux, soumis à une différence de pression constante. La compréhension de ces surfaces - dites à courbure moyenne constante [53] - passe par une capacité à les construire numériquement en contrôlant les paramètres qui les définissent [51][54]. Nous travaillons à la mise au point d'algorithmes fiables et pratiques pour la construction numérique de ces surfaces par la méthode de Dorfmeister-Pedit-Wu reposant sur des factorisations de groupes de lacets (groupe de Lie de dimension infinie), théâtre d'interactions encore mal comprises de phénomènes numériques et symboliques.

6.4. Liens symboliques-numériques

6.4.1. *Factorisation exacte et approchée*

Participants : Guillaume Chèze, André Galligo.

A. Galligo et ses collaborateurs canadiens ont proposé une nouvelle méthode algorithmique pour calculer une factorisation absolue des polynômes à deux variables de $\mathbb{Q}[X, Y]$. Elle a fait l'objet d'une présentation avec publication au congrès ISSAC'02 [24]. Une étape importante de cette méthode consiste à obtenir une factorisation exacte (à coefficients dans une extension de $\mathbb{Q}$) à partir d'un algorithme de factorisation approché. Cette étape a été précisée, bien améliorée et démontrée rigoureusement par G. Chèze. L'ingrédient de base est l'étude fine de certaines extensions entières. Ce nouvel algorithme peut également servir comme complément à d'autres approches notamment à [67], [68], ... G. Chèze et A. Galligo ont rédigé un article qui a été soumis au Journal of Symbolic Computation.

6.4.2. *Décomposition de courbes gauches*

Participants : André Galligo.

Collaboration avec David Rupprecht.
A. Galligo et D. Rupprecht ont terminé la rédaction d'un article sur la décomposition irréductible absolue des courbes gauches pouvant avoir des composantes multiples. Cet article a été publié dans un numéro spécial du Journal of Symbolic Computation [20].

6.4.3. *Prédicats géométriques certifiés*

Participants : Ioannis Emiris, Daniel Perrucci.

Collaboration avec Menelaos Karavelas (Projet PRISME*).*
Dans le cadre du projet européen ECG, nous nous intéressons au diagramme de Voronoï de disques (et éventuellement de sphères). Un algorithme dynamique et efficace fait appel à certaines opérations algébriques afin de déterminer des propriétés géométriques des données. Le prédicat de base revient à comparer les racines de deux polynômes de second degré, ce qui a été résolu de manière efficace en suivant une méthode combinant l'utilisation de suites de Sturm, de résultants et de techniques algorithmiques [62] qui améliore des résultats

antérieurs [16]. Le travail effectué comprend une implémentation complète de l'algorithme qui construit le diagramme de Voronoï de disques (ou diagramme d'Apollonius) et sera compatible avec la bibliothèque CGAL.

Le stagiaire D. Perrucci a examiné une autre approche pour le même prédicat, basée sur la trace d'une matrice de multiplication. Cette méthode demande le calcul des mêmes expressions que la méthode implémentée, mais semble être plus directement généralisable en dimensions supérieures.

6.4.4. Approximation et topologie

Participant : Bernard Mourrain.

Collaboration avec Dominique Amar et Mariette Yvinec (projet PRISME*).*
Bien que les courbes et surfaces paramétrées soient abondamment utilisées dans certains domaines, certaines questions géométriques conduisent cependant au traitement d'objets définis de manière implicite. Leur traitement, c'est-à-dire dans certains cas l'analyse de la topologie ou du calcul d'une approximation polygonale, sont alors particulièrement cruciaux. L'approche décrite dans la section 6.1.3 est reprise ici pour construire une approximation linéaire par morceaux dont la topologie est la même que la courbe ou surface initiale. Deux techniques, l'une basée sur des boîtes et l'autre sur des simplexes, sont étudiées. Ces domaines sont subdivisés suivant la distribution des signes des coefficients afin d'obtenir des représentations polygonales qui décrivent la topologie ou qui approchent à une précision donnée l'objet algébrique. La méthode basée sur des représentations triangulaires est couplée à une triangulation de Delaunay, dans le but de produire une approximation polygonale (ou polyédrique) dont la géométrie est adaptée à celle de la courbe ou de la surface implicite. Des expérimentations ont été faites avec les bibliothèques SYNAPS et CGAL, pour le tracé de courbes planes. Une analyse de la complexité de cette méthode en fonction des caractéristiques géométriques de l'objet implicite est en cours, ainsi qu'un article décrivant cette approche.

6.5. Aspects logiciels du calcul scientifique

6.5.1. Noyau courbe

Participants : Hironmay Basu, Monique Teillaud.

Bibliothèque CGAL *: http://www.cgal.org/.*
Nos travaux sur les prédicats (voir 6.4.3) se sont poursuivis lors d'un stage qui a permis de coder un nouveau prédicat pour les arrangements d'arcs de cercles.

Par ailleurs, les prédicats programmés ont été rassemblés dans des classes structurées sur le modèle des noyaux de CGAL [42], fournissant ainsi un embryon de noyau pour les objets courbes destiné à étendre les noyaux CGAL, ceux-ci ne contenant que peu de fonctionnalités concernant des objets courbes.

Des comparaisons expérimentales avec des codes développés dans d'autres sites ECG (voir section 8.3.1) sont en cours.

6.5.2. Normalisation, langage de programmation

Participant : Gabriel Dos Reis.

Le langage de programmation C++ est un composant essentiel de nos outils de développement logiciel. Ceci pour plusieurs raisons : (a) il est un langage industriel disponible sur pratiquement tous les plateformes ; (b) il offre des mécanismes de « glue » qui permettent de lier et de réutiliser des logiciels existants ; (c) il offre des mécanismes d'abstraction et de généricité permettant de capturer les structures des algorithmes et de gérer une partie de la complexité inhérente au calcul scientifique. Cependant le manque de professionels du calcul scientifique au sein du comité ISO/CEI JTC1/SC22/WG21 chargé de la normalisation de ce langage a conduit à certaines situations déplorables [52] en ce qui concerne le support numérique. Notre participation récente aux travaux de ce comité a permis de débloquer la situation à cet égard et de faire avancer les choses [33]. Nous comptons continuer cet effort de normalisation afin de consolider et d'améliorer cet outil de travail. Nous servons également de lien (au sein de groupe des experts C/C++ de l'AFNOR) avec le groupe ISO/CEI JTC1/SC22/WG11.

6.5.3. Calcul symbolique, numérique, généricité et spécialisation

Participants : Gabriel Dos Reis, Bernard Mourrain, Philippe Trébuchet.

Collaboration avec Fabrice Rouillier (Projet SPACES*).*
Le développement de code pour le calcul symbolique/numérique fait appel à un large échantillon de types de nombres, allant des entiers modulaires à l'arithmétique des grands nombres, en passant par les flottants machines. L'utilisation d'outils externes spécialisés en algèbre linéaire numérique ou le développement de l'algorithmique en calcul exact impliquent également un grand nombre de représentations de données, partageant souvent beaucoup de propriétés. La généricité des implémentations et la possibilité d'exploiter de manière transparente les spécialisations sont autant de problèmes critiques auxquels nous sommes confrontés dans l'implémentation de nos algorithmes. Nous décrivons dans [26][43], l'approche que nous avons suivie dans SYNAPS pour traiter ces problèmes. Trois niveaux de structures y sont décrits : les conteneurs, les vues et les modules. Une technique de recherche de nom (*Koenig lookup*) est exploitée pour accéder, sans perdre en efficacité, aux spécialisations de codes quand elles sont fournies. Ceci nous permet d'utiliser de manière transparente des outils externes tels que LAPACK (algèbre linéaire numérique), SUPERLU (matrice creuse) ou encore GMP (arithmétique étendue).

6.5.4. Interfaces interprète/bibliothèque

Participants : Bernard Mourrain, Simon Plumecoq, Monique Teillaud.

Collaboration avec Fabrice Rouillier (Projet SPACES*).*
Deux façons de développer des outils pour expérimenter, tester ou valider les algorithmes coexistent dans notre domaine. D'un côté, le prototypage dans un système généraliste de calcul formel fournissant un accès à un grand nombre de fonctionnalités, non nécessairement optimisées. De l'autre, le développement, sous forme de bibliothèques, de codes spécialisés particulièrement efficaces dans un domaine très précis. Le but du stage de S. Plumecoq était de rendre accessibles les fonctionnalités de telles bibliothèques spécialisées (c'est-à-dire SYNAPS ou CGAL) à partir d'un système généraliste comme MAPLE. Pour cela, une liaison dynamique du noyau MAPLE (version 7) avec l'outil de communication UDX (développé par F. Rouillier) a été mise en place. Ceci permet alors de piloter des applications distantes telles que des solveurs spécialisés s'appuyant sur SYNAPS ou encore des algorithmes de triangulation de la bibliothèque CGAL reliés à un outil de visualisation tel que GEOMVIEW. Les outils permettant de mettre simplement en place de telles connexions feront partie des futures distributions de la bibliothèque SYNAPS.

6.5.5. Suppression de sommets dans la triangulation de Delaunay 3D

Participante : Monique Teillaud.

Travail en commun avec Olivier Devillers (projet PRISME*).*
Le module Triangulation 3D de CGAL *est maintenu en collaboration avec Sylvain Pion, MPI Sarrebruck.*
Bien que la triangulation de Delaunay soit une structure bien connue, supprimer un point de manière robuste reste un problème délicat en pratique.

Nous proposons une méthode simple pour la suppression d'un point dans une triangulation de Delaunay 3D qui fonctionne dans tous les cas, même très dégénérés. La solution est disponible dans la bibliothèque CGAL (versions 2.3 et 2.4).

La méthode proposée [32] [50] a une complexité sous-optimale mais elle n'utilise que les tests de base nécessaires à la triangulation de Delaunay, à savoir le prédicat de cosphéricité, au contraire d'autres méthodes nécessitant l'introduction de tests plus compliqués. Ceci a plusieurs avantages : la gestion des cas dégénérés peut être entièrement faite dans le prédicat de cosphéricité au moyen d'une technique de perturbation symbolique ; l'utilisation du seul prédicat de cosphéricité permet de maintenir la généricité de l'algorithme en ne réclamant pas à l'utilisateur de fournir des prédicats non directement reliés au problème ; enfin, la non optimalité est peu génante en pratique car elle ne se produit que dans des cas pathologiques : pour des points dans une position raisonnable, le degré du point supprimé est en général constant et ces problèmes de complexité ne se posent pas.

6.6. Applications

6.6.1. Application à la CAO

Participants : Ioannis Emiris, Bernard Mourrain, Jean-Pascal Pavone, Adrien Sales.

Un des problèmes incontournables de la CAO est certainement l'intersection de courbes ou surfaces. L'objet du stage d'A. Sales était de comparer expérimentalement différentes méthodes d'intersection de courbes planes. Cette comparaison inclut des méthodes de subdivision, de projections par résultant et valeurs propres, ainsi que la méthode algébrique (section 6.1.1). Des exemples de courbes de degré modéré et s'intersectant simplement jusqu'aux intersections en des points singuliers de multiplicité élevée ont été testés permettant d'analyser les faiblesses et les avantages des différentes approches.

L'algorithme de calcul d'autointersection décrit à la section 6.3.1 a également été connecté à un outil de CAO développé par un de nos collaborateurs industriels et testé avec succès dans ce contexte applicatif, après une première intégration à travers la technologie objet COM, sous Windows.

6.6.2. Conformations moléculaires et géométrie de distances

Participants : Pierre Bel, Ioannis Emiris, Bernard Mourrain.

Mots clés : *matrice de distances, matrice de contacts, Résonance Magnétique Nucléaire*.

Une partie du travail est effectuée par Théodore Nikitopoulos, étudiant en DEA à l'Université de Crète (Grèce) sous la direction de Ioannis Emiris.

Le calcul des conformations d'une molécule sous certaines contraintes géométriques est une question cruciale pour la biologie moléculaire et la pharmacologie. Des expériences, par exemple de Résonance Magnétique Nucléaire (RMN), fournissent des bornes sur les distances entre atomes ou radicaux. Les approches étudiées utilisent soit la *matrice de distances* de la molécule, soit sa *matrice de contacts*. Nous avons travaillé sur deux problèmes voisins.

Les méthodes de calcul formel ont été appliquées, avec succès dans le cas où la matrice de distances est bien définie et sa dimension est petite [57]. Nous avons implémenté une *perturbation structurée* en MATLAB, appliquée sur les matrices de distances [65]. Cet algorithme calcule des conformations voisines aux données pour les molécules avec, au plus, une trentaine de degrés de liberté. Nous travaillons actuellement sur d'autres méthodes afin d'exploiter des bornes plus serrées de manière efficace.

Le stage de Pierre Bel, sous la direction de I. Emiris et B. Mourrain, a examiné le problème de matrices de contacts mal définies, c'est-à-dire quand les radicaux qui indexent les lignes et les colonnes ne sont pas encore ordonnés. On s'est ramené à une question d'optimisation conduisant à un problème de séparation des graphes, qui a fait l'objet du stage de Pierre Bel. Un algorithme génétique nous permet d'améliorer les résultats obtenus.

8. Actions régionales, nationales et internationales

8.1. Actions régionales

8.1.1. Action Colors

Participants : Ioannis Emiris [correspondant], Bernard Mourrain, Olivier Ruatta, Sébastien Bis, Jean-Pierre Técourt.

Action Color SIMPLES : http://www-sop.inria.fr/galaad/emiris/simples.html

L'action Colors SIMPLES (Surfaces Implicites Et Singularités) consiste à une collaboration avec l'Equipe de BIOMÉTRIE de l'INRA-Avignon (F. Aries et R. Senoussi) sur l'implicitisation des surfaces (ou des courbes) paramétriques. Le but de SIMPLES est de comprendre les relations entre les différentes approches, puis de les combiner. Les problèmes biologiques qui motivent ce travail demandent souvent l'implicitisation des surfaces réciproques, appliquées entre autres dans le calcul des volumes englobants.

8.2. Actions nationales

8.2.1. Action Bio-informatique

Participants : Ioannis Emiris, Bernard Mourrain [correspondant], Pierre Bel, Antoine Marin.

Ce travail consiste à étudier les conformations moléculaires dans l'espace euclidien à partir des données sur la position relative (parfois les distances) des atomes ou des radicaux (groupements d'atomes). Ces informations sont obtenues par des méthodes expérimentales, principalement de Résonance Magnétique Nucléaire (RMN). Le stage de Pierre Bel a examiné le problème des matrices de contacts d'une molécule, mais dont les radicaux qui indexent les lignes et les colonnes ne sont pas bien ordonnés.

Enfin, Antoine Marin commence un post-doctorat sur l'analyse de structures moléculaires tri-dimensionnelles : typage des acides aminés à partir de leurs déplacements chimiques à l'aide de la méthodologie Support Vecteurs Machine (SVM), réordonnancement des résidus observés sur les spectres dans la séquence de la protéine, reconstruction de la structure 3D à partir des informations de distance.

8.3. Actions internationales

8.3.1. ecg : Effective Computational Geometry for Curves and Surfaces

Participants : Laurent Busé, Guillaume Chèze, Carlos D'Andrea, Mohamed Elkadi, Ioannis Emiris, André Galligo, Bernard Mourrain, Olivier Ruatta, Jean-Pierre Técourt, Monique Teillaud [correspondante], Philippe Trébuchet.

Projet ECG *: http://www-sop.inria.fr/prisme/ECG/*

l'INRIA (PRISME et GALAAD) assure la coordination du projet de recherche communautaire ci-dessous :
- Acronyme : ECG, numéro IST-2000-26473
- Titre : Effective Computational Geometry for Curves and Surfaces.
- Programme spécifique du projet : IST
- Modalité du projet : RTD (FET Open)
- Date de début : 1er mai 2001 - Durée : 3 ans
- Mode de participation de l'Inria : coordinateur
- Liste des partenaires :
    - ETH Zürich (Suisse),
    - Freie Universität Berlin (Allemagne),
    - Rijksuniversiteit Groningen (Pays-Bas),
    - MPI Sarrebruck (Allemagne),
    - Tel Aviv University (Israël)
- Résumé du projet : Traitement effectif des objets courbes en géométrie algorithmique. Algorithmes géométriques pour les courbes et les surfaces, questions algébriques, problèmes de robustesse, approximation.

Monique Teillaud assure la communication avec le *Board* et les membres pour la coordination du projet, ainsi que la communication avec le *Project Officer* de Bruxelles.

Outre les pages web publiques du projet (http://www-sop.inria.fr/prisme/ECG/), elle maintient des sites internes à accès restreint, ainsi que les listes d'adresses électroniques utilisées pour la communication interne. À titre indicatif, la liste des participants contient actuellement 65 adresses. Menelaos Karavelas (projet PRISME) a mis en place des scripts `php` de soumission automatique des rapports de recherche, accessibles depuis les sites internes. Olivier Ruatta a installé le serveur *MySQL* utilisé pour la gestion de la base de données des rapports de recherche.

Le *Workshop on Robustness and Efficiency Issues in Implementing Arrangements of Curves and Surfaces* a été organisé par Dan Halperin (Université de Tel Aviv) et Monique Teillaud à l'INRIA les 18 et 19 décembre. Ce workshop était principalement destiné à renforcer les interactions entre les partenaires sur un sujet précis, et plusieurs chercheurs extérieurs à ECG y ont été invités.

8.3.2. gaia

Participants : Laurent Busé, Mohamed Elkadi, Ioannis Emiris, André Galligo [correspondant], Michel Merle, Bernard Mourrain, Jean-Pascal Pavone, Olivier Ruatta.

http://www.math.sintef.no/gaiatwo/
En relation avec l'université de Nice, l'action GALAAD intervient dans le projet européen GAIA :
- Acronyme : GAIA II, numéro IST-2001-35512
- Titre : Intersection algorithms for geometry based IT-applications using approximate algebraic methods
- Programme spécifique du projet : IST
- Modalité du projet : FET-Open
- Date de début : 1er juillet 2002 - Durée : 3 ans
- Mode de participation de l'Inria : participant via l'UNSA
- Liste des partenaires :
SINTEF Applied Mathematics, Norvège
Johannes Kepler University, Autriche
UNSA (France)
Université de Cantabria, Espagne
Think3 SPA, Italie et France
University of Oslo, Norvège
- Résumé du projet : détection et traitement d'intersections, d'auto-intersections, analyse des singularités, classification, géométrie algébrique approchée et applications à la CAO.

8.3.3. Actions bilatérales

Participants : Laurent Busé, Mohamed Elkadi, Ioannis Emiris [correspondant], André Galligo, Bernard Mourrain, Olivier Ruatta.

En collaboration avec A. Dickenstein et C. D'Andrea (Univ. de Buenos Aires).
Collaboration avec le département de Mathématiques de l'Université de Buenos Aires (Argentine), au sein d'une action ECOS-Sud de 3 ans (2001-2003). Elle finance des missions de chercheurs ainsi que des séjours de plus longue durée de doctorants et de post-doctorants. Sous le titre « Résolution robuste de systèmes algébriques et applications en la conception assistée par ordinateur », la thématique concerne la théorie de l'élimination, les matrices du résultant, mais aussi de nouveaux sujets de recherche liés aux applications à la modélisation et à la conception assistée par ordinateur.

9. Diffusion des résultats

9.1. Animation de la Communauté scientifique

9.1.1. Organisation de séminaire

Séminaire commun avec le projet CAFE sur les systèmes polynomiaux et différentiels.

9.1.2. Participation aux comités

Numéro spécial de "Theoretical Computer Science" sur les algorithmes algébriques et numériques, édité par I. Emiris, B. Mourrain et V.Y. Pan.

9.1.3. Participation aux comités de sélection

B. Mourrain a participé à la section d'audition de l'UR de Sophia Antipolis.

9.1.4. Organisation de conférences et écoles

I. Emiris a co-organisé une session sur la modélisation géométrique dans le cadre de la conférence internationale *Applications of Computer Algebra* à Volos (Grèce) du 25 au 28 Juin 2002.

B. Mourrain était l'un des organisateurs de l'école *Outils de calculs symboliques numérique collaboratifs*, Presqu'île de Giens, 19-25 septembre, (Édition d'un CDROM regroupant les différents logiciels et tutoriaux de l'école) et des journées *Calcul Formel Libre*, Lyon, 21-23 Mai.

M. Teillaud est co-organisatrice de l'atelier *Workshop on Robustness and Efficiency Issues in Implementing Arrangements of Curves and Surfaces*, INRIA Sophia Antipolis, 18-19 décembre.

9.1.5. Autres comités

B. Mourrain est chargé de formation par la recherche et membre du Comité de Suivi Doctoral.

M. Teillaud est membre élu du Comité de Centre de l'UR et en maintient les pages www http://www-sop.inria.fr/direction/DR:I/ComiteCentre/. Elle est également suppléante à la Commission Locale Hygiène et Sécurité.

9.1.6. Serveur WWW

http://www-sop.inria.fr/galaad/ . Ce site contient une collection de fiches explicatives sur les sujets présentés dans ce rapport, sur nos publications ainsi que sur les logiciels téléchargeables, que nous développons dans GALAAD.

9.2. Participation à des colloques et invitations

Les membres du projet ont présenté des articles lors de plusieurs conférences : on se reportera à la bibliographie pour en avoir la liste complète.

- L. Busé a donné un exposé à la conférence ACA'02, Volos, Grèce, 25-28 Juin 2002. Il a également été invité dans les séminaires de l'équipe GAGE (Palaiseau, 20 Juin) et de l'équipe d'algèbre et géométrie de l'ULP Strasbourg (25-27 Mars).
- G. Chèze, M. Elkadi, G. Dos Reis, JP. Técourt, M. Teillaud et P. Trébuchet ont participé à l'école sur les *Outils de calcul symbolique et numérique*, 16-20 septembre, Giens.
- G. Chèze s'est rendu à l'école Jeunes Chercheurs en Algorithmique et Calcul Formel à Lille (25-30 Mars) puis au colloque de mathématiques effectives de Poitiers (5-7 septembre).
- I. Emiris s'est rendu à l'Université de Buenos Aires (Argentine) (20/2-5/3) dans le cadre de la collaboration bilatérale ECOS-Sud ; il a co-organisé une session sur la Modélisation Géométrique dans le cadre de la conférence internationale « Applications of Computer Algebra » à Volos (Grèce) du 25/6 au 28/6 ; il a été invité à l'ORCCA (Ontario Research Center for Computer Algebra) à London (Canada) du 15/7 au 12/8, à la conférence Espagnole de Calcul Formel à Penaranda del Duero (Espagne) du 10/9 au 13/9.
- A. Galligo a participé et donné des exposés au trois colloques suivants : ACA à Volos (Grèce) en Juin, ISSAC'02 à Lille en Juillet, LNF à Toulouse en Décembre ainsi qu'aux journées de lancement du projet européen GAIA en Août à Olso.
- B. Mourrain a donné un exposé à la conférence *Courbes et Surfaces* (27 juin-3 juillet, St Malo), à *Inter. Conf. on Mathematical Software* (17-19 août, Beijing), et a participé à l'Int. Conf of Math. (20-27 août, Beijing), aux journées de lancement du projet européen GAIA (29-31 août, Olso), au *Workshop on Effective Topology* ECG (21-25 Octobre, Sophia Antipolis), aux Journées *Liens Calcul Numérique-Calcul Formel* (4-6 décembre, Toulouse). Il a été invité à la conférence *Applications of Computer Algebra* (3-6 avril, Catania), pour un tutorial à la conférence ISSAC (7-10 juillet, Lille), à l'atelier *Algebraic Geometry and Geometric Modeling* (29 juillet-2 août, Vilnius), au Colloque *Mathématiques Effectives* (5-7 septembre, Poitier).
- J.-P. Pavone a participé à la conférence « Applications of Computer Algebra » à Volos (Grèce) du 25 au 28 juin,
- O. Ruatta a donné un exposé à ACA2002, Volos, Grèce, 25-28 juin 2002. Il a également fait un exposé à l'Ecole des Jeunes Chercheurs en Algorithmique et Calcul Formel 2002 à Lille (25-30 mars). Il a également été invité à l'université de Limoges où il a fait un exposé.

- M. Teillaud a présenté un exposé invité au *DIMACS Workshop on Implementation of Geometric Algorithms*, 4-6 décembre 2002. Elle a participé à la conférence *Courbes et Surfaces*, 27 juin-3 juillet, St Malo.
- P. Trébuchet a fait un exposé aux journées *Calcul Formel Libre* (21-23 mai, Lyon), à la rencontre du projet de biologie structurelle (18 Décembre, Montpellier).
- I. Emiris et M. Teillaud ont participé à l'atelier de fin de première année du projet européen ECG (Effective Computational Geometry) à Zurich (Suisse) du 21/5 au 23/5.

9.3. Formation

9.3.1. Enseignement universitaire

- L. Busé : Licence de Mathématiques, UNSA, chargé de TD, et IUT de Nice-Fabron, TD de première année section TC.
- G. Chèze : DEUG Mathématiques-Informatique et Licence de Mathématiques, UNSA, chargé de TD.
- M. Elkadi : Licence et DEA de Mathématiques, UNSA (30h).
- I. Emiris : DEA MDFI, Université d'Aix-Marseille (6h).
- A. Galligo : Deug de Mathématique, UNSA.
- B. Mourrain : DEA MDFI, Université d'Aix-Marseille (10h), DEA de Mathématiques, UNSA (30h), DEA d'Algorithmique, LIP6, Paris VI (10h). Maîtrise Math-Info, UNSA (40h).
- J.-P. Pavone : Chargé de TD IUT Informatique.
- J.-P. Técourt : Chargé de TP Java en Deug.
- M. Teillaud : ISIA (10h), Maîtrise d'informatique, UNSA (8h).

9.3.2. Thèses en cours

- Guillaume Chèze, Factorisation de polynômes à plusieurs variables, UNSA.
- Jean-Pascal Pavone, Étude de la géométrie des surfaces paramétrées utilisées en CAO, UNSA.
- Jean-Pierre Técourt, Algorithmique des courbes et surfaces implicites, UNSA.

9.3.3. Thèses soutenues

- Olivier Ruatta, Dualité des algèbres et problèmes d'effectivité en géométrie algébrique, Université d'Aix-Marseille II, (22 septembre).
- Philippe Trébuchet, Vers des algorithmes de résolution d'équations polynomiales stables et rapides, Université Pierre et Marie Curie, (16 décembre).

9.3.4. Stages

Les sujets de stage proposés peuvent être consultés http://www-sop.inria.fr/galaad/stages/

- Hironmay Basu, *New predicates for circle arcs in* CGAL, IIT Kharagpur.
- Pierre Bel, *Reconstruction de structures moléculaires*, Magistère Cachan.
- Sébastien Bis, *Implicitisation de surfaces algébriques*, DEA de Nice.
- Grégory Gatellier, *Règle de Descartes généralisées*, DEA d'algorithmique Paris 6.
- Paul Palackel, *Algorithmiques des Quadriques implicites*, IIT Dehli.
- Daniel Perrucci, *Different methods to compare real roots of polynomials of degree 2*, Université de Buenos Aires.
- Simon Plumecoq, *Utilisation de bibliothèques externes en C++ depuis un système général de calcul formel*, ESSI.
- Jean-Pierre Técourt, *Les Surfaces de Steiner*, DEA de Limoges.
- Adrien Sales, *Intersection de courbes et surfaces*, DEA de Nice.
- Alexandre Boileau et Anick Coquelle, *Approximation of regular offsets*, Maitrise MIM de Nice.

10. Bibliographie

Bibliographie de référence

[1] L. BUSÉ, M. ELKADI, B. MOURRAIN. *Residual resultant of complete intersection.* in « J. Pure & Appl. Algebra », volume 164, 2001, pages 35-57.

[2] J.F. CANNY, I.Z. EMIRIS. *A Subdivision-Based Algorithm for the Sparse Resultant.* in « J. ACM », numéro 3, volume 47, mai, 2000, pages 417-451.

[3] M. ELKADI, B. MOURRAIN. *Algorithms for residues and Lojasiewicz exponents.* in « J. of Pure and Applied Algebra », volume 153, 2000, pages 27-44.

[4] I. EMIRIS. *Algorithmes Algébriques et Géométriques.* Habilitation à diriger des recherches, Université de Nice Sophia-Antipolis, École Doctorale des Sciences pour l'Ingénieur, janvier, 2000.

[5] I.Z. EMIRIS, A. GALLIGO, H. LOMBARDI. *Certified Approximate Univariate GCDs.* in « J. Pure & Applied Algebra, Special Issue on Algorithms for Algebra », volume 117 & 118, mai, 1997, pages 229-251.

[6] I.Z. EMIRIS, B. MOURRAIN. *Matrices in Elimination Theory.* in « J. Symbolic Computation, Special Issue on Elimination », volume 28, 1999, pages 3-44.

[7] A. GALLIGO. *Théorème de division et stabilité en géométrie analytique locale.* in « Ann. Inst. Fourier », volume 29, 1979, pages 107-184.

[8] A. GALLIGO, S. WATT. *A Numerical Absolute Primality Test for Bivariate Polynomials.* in « Proc. Annual ACM Intern. Symp. on Symbolic and Algebraic Computation », pages 217-224, 1997.

[9] B. MOURRAIN. *Algorithmes et Applications en Géométrie Algébrique.* Habilitation à diriger des recherches, Univ. de Nice, septembre, 1997, http://www-sop.inria.fr/galaad/mourrain/Habilitation/index.html.

[10] B. MOURRAIN, V. PAN. *Multivariate Polynomials, Duality and Structured Matrices.* in « J. Complexity », numéro 1, volume 16, 2000, pages 110-180.

Thèses et habilitations à diriger des recherche

[11] O. RUATTA. *Dualité des algèbres et problèmes d'effectivité en géométrie algébrique.* thèse de doctorat, Université d'Aix-Marseille II, 2002.

[12] P. TRÉBUCHET. *Vers une résolution stable et rapide des équations algébriques.* thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, 2002.

Articles et chapitres de livre

[13] J.-D. BOISSONNAT, O. DEVILLERS, S. PION, M. TEILLAUD, M. YVINEC. *Triangulations in CGAL.* in « Comput. Geom. Theory Appl. », volume 22, 2002, pages 5-19.

[14] C. D'ANDREA, I.Z. EMIRIS. *Hybrid Sparse Resultant Matrices for Bivariate Polynomials.* in « J. Symbolic Computation », numéro 5, volume 33, 2002, pages 587-608, Special Issue.

[15] D. DANEY, I.Z. EMIRIS. *Variable Elimination for Reliable Parallel Robot Calibration.* in « Electr. J. Computat. Kinematics », numéro 1, volume 1, 2002, http://www-sop.inria.fr/coprin/EJCK/Vol1-1/index.html.

[16] O. DEVILLERS, A. FRONVILLE, B. MOURRAIN, M. TEILLAUD. *Algebraic methods and arithmetic filtering for exact predicates on circle arcs.* in « Comput. Geom. Theory Appl. », volume 22, 2002, pages 119-142.

[17] O. DEVILLERS, S. PION, M. TEILLAUD. *Walking in a triangulation.* in « Internat. J. Found. Comput. Sci. », volume 13, 2002, pages 181-199.

[18] I.Z. EMIRIS. *Enumerating a Subset of the Integer Points inside a Minkowski Sum.* in « Comp. Geom. : Theory & Appl., Spec. Issue », numéro 1-3, volume 22, 2002, pages 143-166.

[19] I.Z. EMIRIS, V.Y. PAN. *Symbolic and Numeric Methods for Exploiting Structure in Constructing Resultant Matrices.* in « J. Symbolic Computation », volume 33, 2002, pages 393-413.

[20] A. GALLIGO, D. RUPPRECHT. *Irreducible decomposition of curves.* in « J. Symbolic Comput. », numéro 5, volume 33, 2002, pages 661-675.

[21] O. GRELLIER, P. COMON, B. MOURRAIN, P. TRÉBUCHET. *Analytical Blind Channel Identification.* in « IEEE Trans. on Signal Processing », numéro 9, volume 50, 2002, pages 2196-2207.

[22] B. MOURRAIN, O. RUATTA. *Relation between roots and coefficients, interpolation and application to system solving.* in « JSC », numéro 5, volume 33, 2002, pages 679-699.

[23] B. MOURRAIN, M. VRAHATIS, J. YAKOUBSOHN. *On the Complexity of Isolating Real Roots and Computing with Certainty the Topological Degree.* in « J. of Complexity », numéro 2, volume 18, 2002.

Communications à des congrès, colloques, etc.

[24] R. M. CORLESS, A. GALLIGO, I. S. KOTSIREAS, S. M. WATT. *A geometric-numeric algorithm for factoring multivariate polynomials.* in « Proc. of ISSAC 2002 », ACM Press, pages 37-45, Lille, July, 2002.

[25] A. DICKENSTEIN, I.Z. EMIRIS. *Multihomogeneous Resultant Matrices.* in « Proc. Annual ACM Intern. Symp. on Symbolic and Algebraic Computation », ACM Press, pages 46-54, Lille, France, 2002.

[26] G. DOS REIS, B. MOURRAIN, R. ROUILLIER, P. TRÉBUCHET. *An environment for Symbolic and Numeric Computation.* in « Proc. of the International Conference on Mathematical Software », série World Scientific, pages 239-249, 2002.

[27] I.Z. EMIRIS. *Toric elimination theory.* in « Proc. Encuentro de Algebra Computacional y Aplicaciones (EACA), Invited talk », pages 49-64, Spain, 2002.

[28] B. MOURRAIN, Y. V. PAN, O. RUATTA. *Asymptotic acceleration of solving multivariate polynomial systems*

of equations. in « Proceedings of Smale fest 2000 », série Foundations of Computational Mathematics, World Scientific, NewJersey, London, Singapore, Hong Kong, pages 267-294, 2002.

[29] B. MOURRAIN, P. TRÉBUCHET. *Algebraic methods for numerical solving.* in « Proc. of the 3rd International Workshop on Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing'01 (Timisoara, Romania) », pages 42-57, 2002.

Rapports de recherche et publications internes

[30] S. BIS. *Implicitisation de surfaces algébriques.* Rapport de Recherche, numéro 4684, INRIA, 2002, http://www.inria.fr/rrrt/rr-4684.html.

[31] C. D'ANDREA, I. EMIRIS. *Sparse Resultant Perturbations.* rapport technique, numéro ECG-TR-123202-01, INRIA Sophia-Antipolis, 2002.

[32] O. DEVILLERS, M. TEILLAUD. *Perturbations and Vertex Removal in a 3D Delaunay Triangulation.* Rapport de recherche, numéro 4624, INRIA, 2002, http://www.inria.fr/rrrt/rr-4624.html.

[33] G. DOS REIS. *Enhancing Numerical Support.* rapport technique, numéro n1388=02-0046, ISO/CEI JTC1/SC22/WG21, September, 2002, http://anubis.dkuug.dk/JTC1/SC22/WG21/docs/papers/2002/n1388.pdf.

[34] I.Z. EMIRIS. *A survey of symbolic perturbation techniques.* rapport technique, numéro ECG-TR-123202-02, INRIA Sophia-Antipolis, 2002.

[35] I. EMIRIS, I. KOTSIREAS. *On the Support of the Implicit Equation of Rational Parametric Hypersurfaces.* rapport technique, numéro TR-02-01, ORCCA, Canada, 2002, http://www.orcca.on.ca/TechReports/Titles.html.

[36] I.Z. EMIRIS, R. SENDRA. *An inversion-based implicitization method.* Rapport de Recherche, numéro 4484, INRIA, 2002, http://www.inria.fr/rrrt/rr-4484.html.

[37] M. KARAVELAS, I. EMIRIS. *Predicates for the Planar Additively Weighted Voronoi Diagram.* rapport technique, numéro ECG-TR-122201-01, ECG, INRIA Sophia-Antipolis, 2002, http://www.inria.fr/prisme/ECG/Results/.

[38] B. MOURRAIN. *An introduction to algebraic and geometric methods for solving polynomial equations.* Technical Report, numéro ECG-TR-122102-01, INRIA Sophia-Antipolis, 2002.

[39] B. MOURRAIN, P. TRÉBUCHET. *Algebraic methods for numerical solving.* Technical Report, numéro ECG-TR-122102-02, INRIA Sophia-Antipolis, 2002, ftp://ftp-sop.inria.fr/prisme/ECG/Reports/Month12/ECG-TR-122102-02.ps.gz.

[40] B. MOURRAIN, J. TÉCOURT, M. TEILLAUD. *Algebraic methods for dealing with 3D implicit quadrics.* Technical Report, numéro ECG-TR-182105-02, INRIA Sophia-Antipolis, 2002, ftp://ftp-sop.inria.fr/prisme/ECG/Reports/Month18/ECG-TR-182105-02.ps.gz.

[41] B. MOURRAIN, M. VRAHATIS, J. YAKOUBSOHN. *On the complexity of isolating real roots and comput-*

ing with certainty the topological degree. Technical Report, numéro ECG-TR-122102-04, INRIA Sophia-Antipolis, 2002, ftp://ftp-sop.inria.fr/prisme/ECG/Reports/Month12/ECG-TR-122102-04.ps.gz.

[42] M. TEILLAUD. *First Prototype of a CGAL Geometric Kernel with Circular Arcs.* Technical Report, numéro ECG-TR-182203-01, INRIA Sophia-Antipolis, 2002.

[43] G. DOS REIS, B. MOURRAIN, F. ROUILLIER, P. TRÉBUCHET. *An environment for Symbolic and Numeric Computation.* Technical Report, numéro ECG-TR-122102-03, INRIA Sophia-Antipolis, 2002, ftp://ftp-sop.inria.fr/prisme/ECG/Reports/Month12/ECG-TR-122102-03.ps.gz.

Bibliographie générale

[44] H. BRÖNNIMANN, I. EMIRIS, V. PAN, S. PION. *Sign Determination in Residue Number Systems.* in « Theoretical Computer Science, Special Issue on Real Numbers and Computers », numéro 1, volume 210, 1999, pages 173-197.

[45] L. BUSÉ, D. COX, C. D'ANDREA. *Implicitization of surfaces in $\mathbb{P}^3$ in the presence of base points.* in « math.AG/0205251 », 2002.

[46] L. BUSÉ, M. ELKADI, B. MOURRAIN. *Resultant over the residual of a complete intersection.* in « Journal of Pure and Applied Algebra », volume 164 (1-2), 2001, pages 35-57.

[47] L. BUSÉ, J.-P. JOUANOLOU. *On the closed image of a rational map and the implicitization problem.* in « math.AG/0210096 », 2002.

[48] J. CANNY, P. PEDERSEN. *An Algorithm for the Newton Resultant.* rapport technique, numéro 1394, Comp. Science Dept., Cornell University, 1993.

[49] C. D'ANDREA, I.Z. EMIRIS. *Sparse Resultant Perturbations.* éditeurs M. JOSWIG, N. TAKAYAMA., in « Algebra, Geometry, and Software Systems », série Mathematics and Visualization, Springer-Verlag, Berlin, 2002, To appear.

[50] O. DEVILLERS, M. TEILLAUD. *Perturbations and Vertex Removal in a 3D Delaunay Triangulation.* in « Proc. 14th ACM-SIAM Sympos. Discrete Algorithms (SODA) », 2003.

[51] J. DORFMEISTER, F. PEDIT, H. WU. *Weierstrass type representation of harmonic maps into symmetric spaces.* in « Comm. Anal. and Geom. », numéro 4, volume 6, 1998, pages 633-668.

[52] G. DOS REIS. *Fixing `valarray` for Real World Use.* rapport technique, numéro n1246=00-0023, ISO/CEI JTC1/SC22/WG2, 2000, http://anubis.dkuug.dk/JTC1/SC22/WG21/docs/papers/2000/n1246.ps.

[53] G. DOS REIS. *Sur les surfaces dont la courbure moyenne est constante.* thèse de doctorat, Université Paris VII - Denis Diderot, 2001.

[54] G. DOS REIS. *Asymptotics of CMC surfaces with polynomial Hopf differential.* in « Calculus of Variations », 2002, à paraître.

[55] M. ELKADI, B. MOURRAIN. *Algorithms for residues and Lojasiewicz exponents.* in « J. Pure and Appl. Algebra », volume 153, 2000, pages 27-44.

[56] M. ELKADI, B. MOURRAIN. *A new algorithm for the geometric decomposition of a variety.* in « Proc. Intern. Symp. on Symbolic and Algebraic Computation », ACM Press, New-York, éditeurs S. DOOLEY., pages 9-16, 1999, ftp://ftp-sop.inria.fr/galaad/mourrain/9903-ElMo-issac.ps.gz.

[57] I.Z. EMIRIS, B. MOURRAIN. *Computer Algebra Methods for Studying and Computing Molecular Conformations.* in « Algorithmica, Special Issue on Algorithms for Computational Biology », volume 25, 1999, pages 372-402.

[58] J. FAUGÈRE. *A new efficient algorithm for computing Gröbner Basis (F4).* in « J. of Pure and Applied Algebra », volume 139, 1999, pages 61-88.

[59] A. FRONVILLE, O. DEVILLERS, M. TEILLAUD, B. MOURRAIN. *Algebraic Methods and Arithmetic Filtering for Exact Predicates on Circle Arcs.* in « Computational Geometry ; Theory and Application », volume 22, 2002, pages 119-142.

[60] I. GELFAND, M. KAPRANOV, A. ZELEVINSKY. *Discriminants, Resultants and Multidimensional Determinants.* Boston, Birkhäuser, 1994.

[61] J. JOUANOLOU. *Le Formalisme du résultant.* in « Adv. in Math. », numéro 2, volume 90, 1991, pages 117-263.

[62] M. KARAVELAS, I. EMIRIS. *Predicates for the Planar Additively Weighted Voronoi Diagram.* in « Proc. Symp. on Discrete Algorithms (SODA-93) », New-York, ACM Press., éditeurs C. TRAVERSO., pages 231-238, janvier, 2003, www.inria.fr/prisme/ECG/Results/, Prelim. version : ECG-TR-122201-01.

[63] F. MACAULAY. *Some Formulae in Elimination.* in « Proc. London Math. Soc. », numéro 33, volume 1, 1902, pages 3-27.

[64] B. MOURRAIN. *A new criterion for normal form algorithms.* in « Proc. AAECC », série LNCS, volume 1719, Springer, Berlin, éditeurs M. FOSSORIER, H. IMAI, S. LIN, A. POLI., pages 430-443, 1999.

[65] T. NIKITOPOULOS, I.Z. EMIRIS. *Structured Eigenvalue Optimization in Distance Geometry.* in « Hellenic European Conf. Computer Math. & Appl. », Athens, Greece, septembre, 2001, A paraître.

[66] O. RUATTA. *A Multivariate Weierstrass Iterative Rootfinder.* in « Proc. Intern. Symp. on Symbolic and Algebraic Computation », New-York, ACM Press., éditeurs B. MOURRAIN., pages 276-283, London, Ontario, 2001.

[67] D. RUPPRECHT. *Semi-Numerical Absolute Factorization of Polynomials with Integer Coefficients.* in « Journal of Symbolic Computation », 2001, à paraître.

[68] A. J. SOMMESE, J. VERSHELDE, C. W. WAMPLER. *Symmetric functions applied to decomposing solution sets of polynomial systems.* in « SIAM Journal of Numerical Analysis », 2001.