

## *Projet Gamma*

### *Génération Automatique de Maillages et Méthodes d'Adaptation*

*Rocquencourt*

THÈME 4B



*R*apport  
*d'Activité*

2000



## Table des matières

<b>1</b>	<b>Composition de l'équipe</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Présentation et objectifs généraux</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Fondements scientifiques</b>	<b>4</b>
3.1	Méthodes de génération maillage . . . . .	5
3.1.1	Méthode de type Delaunay . . . . .	5
3.1.2	Méthode frontale . . . . .	5
3.1.3	Autres méthodes . . . . .	6
3.1.4	Géométrie algorithmique . . . . .	6
3.2	Méthodes d'adaptation de maillage . . . . .	6
3.3	Définition géométrique . . . . .	7
3.3.1	CAO . . . . .	7
3.3.2	CAO discrète . . . . .	7
3.3.3	Analyse d'une géométrie . . . . .	7
3.3.4	Bases de données . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Domaines d'applications</b>	<b>8</b>
4.1	Panorama . . . . .	8
4.2	E.D.P. et éléments finis . . . . .	8
4.3	E.D.P. et adaptation . . . . .	8
4.4	Maillage des surfaces . . . . .	8
<b>5</b>	<b>Logiciels</b>	<b>8</b>
5.1	Logiciel Bamg . . . . .	9
5.2	Logiciel BL2D . . . . .	10
5.3	Logiciel BLMESH . . . . .	10
5.4	Logiciel BLSURF . . . . .	10
5.5	Logiciel Emc2 . . . . .	11
5.6	Logiciel Medit . . . . .	11
5.7	Logiciel FreeFem+ . . . . .	11
5.8	Logiciel GAMHIC3D . . . . .	11
5.9	Logiciel GHS3D . . . . .	12
5.10	Logiciel YAMS . . . . .	12
<b>6</b>	<b>Résultats nouveaux</b>	<b>12</b>
6.1	Maillage de surfaces paramétrées . . . . .	12
6.1.1	Surfaces composées quelconques . . . . .	13
6.1.2	Surfaces moléculaires (sphériques ou toriques) . . . . .	14
6.2	Maillage de surfaces discrètes . . . . .	14
6.3	Surfaces Delaunay admissibles . . . . .	15
6.4	Contraintes par partition et problème d'existence d'un maillage d'un polyèdre arbitraire . . . . .	16

---

6.5	Maillage des courbes implicites . . . . .	16
6.6	Génération automatique de maillages hexaédriques . . . . .	17
6.7	Publication générale . . . . .	18
<b>7</b>	<b>Contrats industriels (nationaux, européens et internationaux)</b>	<b>19</b>
7.1	Simulog . . . . .	19
7.2	Dassault Aviation . . . . .	19
7.3	SNECMA . . . . .	19
<b>8</b>	<b>Actions régionales, nationales et internationales</b>	<b>19</b>
8.1	Actions européennes . . . . .	19
8.1.1	Projet Magic-Feat . . . . .	19
8.2	Actions nationales . . . . .	20
8.2.1	Action en EEG . . . . .	20
8.2.2	Arc COSTIC . . . . .	20
8.3	Visites et invitations de chercheurs . . . . .	20
<b>9</b>	<b>Diffusion de résultats</b>	<b>20</b>
9.1	Participation à des colloques, séminaires, invitations . . . . .	20
9.1.1	Paul Louis George . . . . .	20
9.1.2	Pascal Frey . . . . .	20
9.1.3	Patrick Laug . . . . .	21
9.2	Enseignement . . . . .	21
<b>10</b>	<b>Bibliographie</b>	<b>21</b>

## 1 Composition de l'équipe

### Responsable scientifique

Paul Louis George [DR]

### Responsable permanent

Patrick Laug [CR]

### Assistante de Projet

Maryse Desnous [TR (en commun avec Macs et M3N)]

### Personnel Inria

Pascal Frey [CR]

Éric Saltel [DR]

### Conseiller scientifique

Olivier Pironneau [Professeur, Université Paris 6]

### Collaborateurs extérieurs

Houman Borouchaki [Professeur, Université de Technologie de Troyes]

Frédéric Hecht [Professeur, Université Paris 6]

### Doctorants

Philippe Pebay [éducation nationale (INSA) et Université Paris 6]

Rachid Ouachtaoui [Université Paris 6]

D. Leservoisier [Snecma]

Olivier Roques [Dassault Aviation, Université Paris 6]

Frédéric Alauzet [Université Montpellier]

## 2 Présentation et objectifs généraux

Une branche importante des sciences de l'ingénieur s'intéresse aux calculs des solutions d'équations aux dérivées partielles très variées (en mécanique du solide, en mécanique des fluides, en modélisation de problèmes thermiques, ...) par la méthode des éléments finis. Cette méthode utilise comme support spatial des calculs un maillage du domaine sur lequel les équations sont formulées. Par suite, les algorithmes (de construction) de maillages occupent un rôle important dans toute simulation par la méthode des éléments finis d'un problème modélisé en équations aux dérivées partielles. En particulier, la précision, voire la validité, des solutions calculées est liée aux propriétés du maillage utilisé comme support [Cia91].

Le projet GAMMA a été créé en 1996. Les thèmes du projet regroupent un ensemble d'activités concernant les points indiqués ci-dessus, en particulier, l'aspect génération automatique de maillages afin de construire les supports utilisés par la méthode des éléments finis. Sont également étudiés les aspects post-traitement et visualisation des résultats issus de tels calculs [P.J99].

L'évolution de la demande en termes de génération automatique de maillages implique une évolution des méthodes classiques de création de maillages vers des méthodes permettant de construire des maillages contrôlés. Les maillages doivent donc être soit isotropes, le contrôle portant sur des tailles souhaitées, soit anisotropes, le contrôle portant à la fois sur des directions et des tailles selon ces dernières.

Le développement d'algorithmes de maillages gouvernés sert de support naturel à la conception de boucles de maillages adaptatifs qui, via un estimateur d'erreurs *a posteriori*, permettent de contrôler la qualité des solutions.

Ces préoccupations amènent à considérer le problème du maillage des domaines de calculs en eux-mêmes tout comme celui du maillage ou du remaillage des courbes et surfaces, frontières de ces domaines.

La taille, en termes de nombre de nœuds, des maillages nécessaires pour certaines simulations, amène à travailler sur la parallélisation des processus de calculs. Cette problématique conduit à s'intéresser à l'aspect parallélisation au niveau des processus de génération des maillages plutôt qu'au niveau des algorithmes de maillages proprement dits.

Simultanément, le volume des résultats obtenus dans de telles simulations, nécessite d'envisager le post-traitement de ces résultats en parallèle ou par des méthodes appropriées.

Les objectifs du projet Gamma consistent à étudier l'ensemble des points mentionnés ci-dessus afin de rendre automatique le calcul de la solution d'un problème donné avec une précision imposée au départ.

## 3 Fondements scientifiques

La construction d'algorithmes de maillages fait appel à un ensemble de disciplines scientifiques incluant notamment la géométrie euclidienne, différentielle, discrète ou algorithmique.

---

[Cia91] P. G. CIARLET, *Basic Error Estimates for Elliptic Problems, II*, North Holland, 1991.

[P.J99] P.J. FREY ET P.L. GEORGE, *Maillages. Applications aux éléments finis*, Hermès Science Publications, Paris, 1999.

Par ailleurs, les aspects de complexité d'algorithme, minimisations des ressources mémoire et les problèmes de précision numérique sont pris en compte.

### 3.1 Méthodes de génération maillage

#### 3.1.1 Méthode de type Delaunay

La base théorique des méthodes de maillage de type Delaunay est fournie par l'ensemble des résultats relatifs aux méthodes de triangulation de Delaunay <sup>[Boi95]</sup>. Dans le cadre du maillage, l'aspect triangulation (de l'enveloppe convexe d'un nuage de points) ne représente qu'une part de l'algorithme à mettre en place. De nouveaux problèmes se posent qui concernent les triangulations *contraintes* (bien résolus en deux dimensions, moins clairs en trois dimensions), la façon de construire les points internes aux domaines (non convexes) considérés, les méthodes d'optimisation et, plus généralement, la définition de ce qu'est un maillage acceptable pour une application de type éléments finis, <sup>[Geo97]</sup>.

Par ailleurs, l'approche développée en deux dimensions et en trois dimensions se prête à une extension *anisotrope*. Un mailleur de type Delaunay anisotrope en trois dimensions a des applications dans les problèmes où des directions sont à privilégier (mécanique des fluides (chocs, couches limites, ...)). En deux dimensions, on retrouve le même type d'applications et, de plus, une méthode qui s'applique à la construction de maillages pour les surfaces paramétrées. En effet, par définition, la géométrie d'une surface est intrinsèquement de nature anisotrope (rayons de courbure).

#### 3.1.2 Méthode frontale

En deux dimensions, la méthode frontale est une méthode bien connue et utilisée depuis longtemps, <sup>[Geo71]</sup>. Un front initial est formé par les arêtes composant la discrétisation des frontières du domaine considéré. Partant d'une de ces arêtes, un point est choisi ou construit puis connecté avec celle-ci pour former un triangle. Le front est alors mis à jour et le même processus est poursuivi tant que le front n'est pas vide. En trois dimensions, <sup>[Loh96]</sup>, cette méthode pose un certain nombre de difficultés liées en particulier au fait qu'il n'existe pas de théorie permettant de définir à coup sûr un algorithme efficace et convergent.

Les problèmes de convergence de l'algorithme, de validité et de qualité des maillages générés sont résolus de manière satisfaisante en se basant sur un maillage de fond et en utilisant des structures de données géométriques adaptées.

---

[Boi95] BOISSONNAT, J.D. ET YVINEC, M., *Géométrie algorithmique*, Ediscience, 1995.

[Geo97] GEORGE, P.L. ET BOROUCHAKI, H., *Triangulation de Delaunay et maillage. Applications aux éléments finis*, Hermès, 1997.

[Geo71] A. GEORGE, *Computer implementation of the finite element method*, thèse de doctorat, Dep. of Computer Science, Stanford, 1971.

[Loh96] R. LOHNER, « Progress in grid generation via the advancing front technique », *Engineering with computers*. 12, 1996, p. 186–210.

### 3.1.3 Autres méthodes

D'autres méthodes de génération de maillages existent. Une méthode importante est basée sur une utilisation "détournée" des structures de données en arbre, telle que le PR-quadtrees. Le domaine est immergé dans une boîte. Celle-ci est divisée de manière récursive en cellules selon une structure d'arbre de façon à vérifier un certain critère (ou test d'arrêt). Les cellules terminales servent alors de support à la création des éléments du maillage, [She91].

### 3.1.4 Géométrie algorithmique

La géométrie algorithmique, [Pre85], [Boi95], ou du moins des parts importantes de celle-ci, donne un support théorique et des indications pratiques pour le développement de nombreux algorithmes utilisés dans le contexte de la génération de maillage.

Les questions générales concernant les structures de données, les algorithmes de base (tri, recherche, ...) et la complexité des algorithmes trouvent naturellement leur place dans nos activités.

Toutes les études sur les triangulations de Delaunay donnent un certain nombre de résultats utiles dans les méthodes de maillage. Parmi ceux-ci, les preuves d'existence ou non de solution indiquent s'il peut être envisagé de chercher des algorithmes dérivés des résultats abstraits ou s'il convient de s'orienter vers des algorithmes de nature plus heuristique.

## 3.2 Méthodes d'adaptation de maillage

Dans une simulation numérique par des méthodes d'éléments finis, la qualité en forme et en taille des éléments du maillage support est importante, en raison de son effet sur la précision des solutions numériques et sur la convergence du schéma numérique utilisé lors du calcul [Cia91], [Ver96]. L'adaptation des maillages au comportement physique du phénomène étudié est un moyen de réduire les temps de calcul et d'améliorer la précision des résultats numériques<sup>1</sup>. La génération du maillage est alors gouvernée par ces résultats pour obtenir un nouveau maillage mieux adapté au phénomène physique modélisé.

Le principe de base pour gouverner un algorithme de construction de maillage est d'introduire la notion de *longueur unité* et de piloter la méthode de façon à construire des arêtes de cette longueur. Cette longueur unité est mesurée dans le champ de métriques correspondant au problème étudié. Ce champ n'est autre qu'une carte de spécifications de tailles ou de directions

---

1. Le critère d'adaptation est basé sur un estimateur d'erreurs *a posteriori* et le résultat de l'analyse est traduit en termes de métriques associées aux noeuds du maillage support du calcul.

---

[She91] SHEPHARD, M. S. AND GEORGES, M. K., « Automatic Three-Dimensional Mesh Generation by the Finite Octree Technique », *Int. J. Numer. Methods Eng.* 32, 4, 1991, p. 709–749.

[Pre85] PREPARATA, F.P. AND SHAMOS, M.I., *Computational geometry, an introduction*, Springer-Verlag, 1985.

[Boi95] BOISSONNAT, J.D. ET YVINEC, M., *Géométrie algorithmique*, Ediscience, 1995.

[Cia91] P. G. CIARLET, *Basic Error Estimates for Elliptic Problems, II*, North Holland, 1991.

[Ver96] R. VERFURTH, *A review of a posteriori error estimation and adaptive refinement techniques*, Wiley-Teubner, 1996.



et de tailles liées, d'une part, à l'analyse des solutions du problème traité via un estimateur d'erreurs approprié et, d'autre part, à des contraintes de nature géométrique.

L'idée pour l'adaptation est alors d'utiliser des algorithmes de maillage gouvernés en les insérant dans une boucle de calculs. Chaque pas de la boucle comprend une phase de génération de maillage, une phase de résolution pour trouver la solution correspondante, une phase d'analyse de cette solution et, si besoin est, le processus complet est répété jusqu'à obtention d'une solution de précision donnée (au sens de l'estimateur d'erreurs).

### 3.3 Définition géométrique

#### 3.3.1 CAO

En trois dimensions, les domaines à mailler sont définis via leur frontière (surface). Au niveau industriel, ces surfaces sont produites par des systèmes de CAO. Néanmoins, deux observations immédiates indiquent que quelques difficultés sont à attendre. En premier lieu, il n'y a pas une mais de nombreuses définitions pour une surface dans les codes de CAO. En second, ces systèmes n'ont pas été originellement prévus pour fournir des maillages au sens éléments finis mais plutôt à des fins de visualisation et de fabrication.

#### 3.3.2 CAO discrète

Une idée simple pour pallier les difficultés mentionnées ci-dessus est de choisir une définition discrète des géométries. Cette CAO discrète est alors relativement facile à utiliser par un mailleur et, en particulier, permet d'éviter d'avoir un couplage direct avec tel ou tel code de CAO, rendant ainsi possible le développement autonome de processus génériques de maillage (en particulier en adaptation de maillages).

#### 3.3.3 Analyse d'une géométrie

Les problèmes de maillage de surfaces nécessite l'analyse de la qualité, en un sens à préciser, des maillages construits. L'analyse des surfaces paramétrées (définies via un espace paramétrique) ou discrètes (définies via un maillage) conduit à chercher des estimateurs fiables quantifiant les écarts de ces surfaces aux maillages censés les approcher.

#### 3.3.4 Bases de données

Les maillages sont construits en vue d'applications de type éléments finis (bien que d'autres applications soient envisageables, visualisation et réalité virtuelle en particulier). Par suite, il est nécessaire de définir des structures de données appropriées permettant la communication entre le mailleur et les autres étapes d'un processus de calcul.

Réaliser une boucle de calculs adaptatifs ou encore mener ce type de travail en parallèle (pour pouvoir traiter des maillages de plusieurs dizaines ou centaines de millions d'éléments) implique que la définition de ces structures de données permette l'accès aux différentes informations utiles (communication entre processeur, transfert de données, liens avec la géométrie, etc.).

## 4 Domaines d'applications

### 4.1 Panorama

**Mots clés** : élément fini, résolution d'EDP, adaptation et contrôle d'erreurs, réalité virtuelle.

Tout calcul par éléments finis ou par volumes finis, dans une certaine mesure, utilise comme support spatial un maillage. Ce dernier sert à discrétiser le domaine où le problème est formulé en l'approchant par l'union des éléments formant son maillage. Par suite, toute simulation numérique via ces méthodes nécessite la construction d'un maillage. Par ailleurs, les maillages de surfaces ont des applications autres, en particulier, en visualisation et en réalité virtuelle (animation, compression d'image, etc.).

### 4.2 E.D.P. et éléments finis

Les applications sont ici les applications classiques indiquées ci-dessus. On trouve donc naturellement des applications en mécanique du solide, en mécanique des fluides, en électromagnétisme, en modélisation thermique, en chimie, etc.

### 4.3 E.D.P. et adaptation

L'adaptation de maillage couplée aux estimateurs d'erreurs permet d'envisager de faire, au niveau industriel, des calculs avec un contrôle automatique d'erreurs. On trouve déjà, en statique pour la mécanique du solide, des produits basés sur ce type de techniques. Le but est évidemment d'étoffer les plages d'utilisation en abordant les cas dynamiques et des problèmes physiques plus compliqués (non-linéaires, en particulier).

### 4.4 Maillage des surfaces

Mailler les surfaces est un pré-requis fondamental pour aborder le maillage des domaines tridimensionnels. En effet, les mailleurs automatiques de tels volumes utilisent, en général, le maillage de leur frontière comme donnée. De plus, la qualité de ce maillage de surface conditionne, dans une large mesure, la qualité du maillage tridimensionnel construit. Par ailleurs, les maillages de surfaces permettent le rendu réaliste des géométries de celles-ci en minimisant, selon certains critères, le nombre d'éléments assurant ce rendu. Les techniques de décimation, par exemple, rendent possible la construction de maillages de tailles différentes (en nombre d'éléments) mais d'aspect visuel identique selon le point d'observation (plus on s'éloigne, moins le maillage est riche en éléments). L'effet immédiat est la rapidité de l'affichage.

## 5 Logiciels

La diffusion des logiciels issus des travaux de recherche du projet Gamma est effectué, à ce jour, de deux façons. La plupart des logiciels en deux dimensions sont accessibles à tous (sauf pour usage commercial) tandis que les autres logiciels, pour le cas des surfaces et en trois

Nom	Dimension	Disponibilité
Bamg	2D	domaine public
BL2D	2D	domaine public
BLMESH	2D	transfert
BLSURF	3D surfacique	transfert
Emc2	2D	domaine public
FreeFem+	2D	domaine public
Medit	toutes dim.	transfert
GAMHIC3D	3D volumique	transfert
GHS3D	3D volumique	transfert
YAMS	3D surfacique	transfert

TAB. 1 – *Tableau des logiciels et des modules.*

dimensions en particulier, font l’objet de diffusion ou de transfert au travers d’accords précis de nature scientifique ou de type commercial. À ce titre, l’équipe a mis dans le domaine public les logiciels BL2D, Emc<sup>2</sup>, Bamg et FreeFEM/GFEM qui sont documentés et accessibles sur le site :

`ftp://ftp.inria.fr/INRIA/Projects/Gamma`

Pour la diffusion des autres logiciels (non présents sur ce site), existants ou à venir, l’Inria et Simulog, en collaboration étroite, proposent différentes solutions permettant des mises à disposition, des évaluations, des transferts de technologie ou des ventes (sous des formes adaptées).

Les différents logiciels (ensemble de programmes autonomes) ou modules (ensemble de programmes à intégrer dans un logiciel) sont présentés par ordre alphabétique dans le tableau ci-dessus et dans la description rapide qui suit.

## 5.1 Logiciel Bamg

**Participant** : Frédéric Hecht [correspondant].

**Mots clés** : maillage, triangle, quadrangle, adaptation de maillage, isotrope, anisotrope.

Bamg est un générateur de maillages bidimensionnels isotropes ou anisotropes. Il permet de construire un maillage à partir d’une géométrie (une frontière) ou de construire un maillage adapté en partant d’un maillage précédent et en se donnant une solution ou une métrique. Il permet aussi, dans ce cas, d’interpoler sur le maillage créé les solutions, dans le cas  $P^1$ , définies sur le maillage précédent.

Une géométrie est définie par un maillage de contours : une liste de sommets, une liste d’arêtes et des informations sur la continuité  $G^1$  souhaitée. Ce logiciel est décrit sur le site :

`http://www-rocq.inria.fr/gamma/cdrom/www/bamg.`

## 5.2 Logiciel BL2D

**Participants** : Patrick Laug [correspondant], Houman Borouchaki [correspondant].

**Mots clés** : maillage, triangle, quadrangle, adaptation de maillage, isotrope, anisotrope.

Le logiciel BL2D crée des maillages bidimensionnels isotropes ou anisotropes. Il peut être intégré dans un processus adaptatif. Son architecture logicielle est modulaire et deux composants jouent un rôle central. Le premier discrétise des courbes dans l'espace  $\mathbf{R}^2$ . Le second maille des domaines dans l'espace  $\mathbf{R}^2$ . Ce mailleur est de type Delaunay généralisé. Ce logiciel est disponible sur le site :

<http://www-rocq.inria.fr/gamma/cdrom/www/bl2d>.

## 5.3 Logiciel BLMESH

**Participants** : Patrick Laug [correspondant], Houman Borouchaki [correspondant].

**Mots clés** : maillage, triangle, quadrangle, adaptation de maillage, isotrope, anisotrope, géométrie variable, élément  $P^1$ , élément  $P^2$ , élément  $Q^1$ , élément  $Q^2$ .

Ce logiciel est issu du logiciel BL2D mais offre des possibilités plus nombreuses. Il crée des maillages isotropes ou anisotropes dans le plan, peut être intégré dans un processus adaptatif, et peut traiter des frontières déformables.

La méthode de maillage est de type Delaunay ou frontale. Dans ce dernier cas, la génération des points internes suit une logique frontale, et leur connexion est réalisée comme dans une approche Delaunay classique. L'obtention de quadrangles est faite par appariement. La construction directe d'éléments de degré 2 est rendue possible via le contrôle du maillage des frontières du domaine, de façon à assurer la compatibilité désirée. Les nœuds milieux frontières sont placés en fonction de l'abscisse curviligne. Les nœuds milieux internes sont, en principe, les milieux des arêtes correspondantes.

La diffusion de ce logiciel est liée à des accords de transfert.

## 5.4 Logiciel BLSURF

**Participants** : Patrick Laug [correspondant], Houman Borouchaki [correspondant].

**Mots clés** : maillage de surface, triangle, quadrangle, adaptation de maillage, isotrope, anisotrope, élément  $P^1$ , élément  $P^2$ , élément  $Q^1$ , élément  $Q^2$ .

Le logiciel BLSURF, [23], [22], permet le maillage de surfaces composées de carreaux paramétrés. Plusieurs types de carreaux ont été prédéfinis (sphériques, cylindriques, toriques, de Bézier, B-spline et NURBS). Ce mailleur surfacique est basé sur une méthode indirecte. On maille les domaines des paramètres puis on reporte ces maillages sur la surface en assurant la compatibilité au niveau des interfaces. Les maillages dans  $\mathbf{R}^2$  sont gouvernés par les propriétés géométriques des carreaux et sont, en général, anisotropes. Les techniques utilisées sont les mêmes que dans le logiciel BLMESH (que ce code utilise en partie).

La diffusion de ce logiciel est liée à des accords de transfert.

## 5.5 Logiciel Emc2

**Participants** : Frédéric Hecht [correspondant], Eric Saltel.

**Mots clés** : maillage, CAO, triangle, quadrangle, triangulation automatique.

Emc2 est un logiciel portable, graphique et interactif d'édition de maillages et de contours en deux dimensions. Il permet de générer interactivement des maillages bidimensionnels pour la méthode des éléments finis en définissant la géométrie (D.A.O), la discrétisation des contours, les sous-domaines et les numéros de référence (afin d'introduire un lien avec la physique, *i.e.*, les conditions aux limites et les propriétés des matériaux). Les maillages, formés de triangles ou de quadrangles, sont essentiellement de type grille ou de type Delaunay.

Il est possible d'éditer un maillage en ajoutant, supprimant, déplaçant des sommets, etc. et en lui appliquant des transformations affines (symétrie, rotation, etc). Ce logiciel est décrit sur le site :

<http://www-rocq.inria.fr/gamma/cdrom/www/emc2>.

## 5.6 Logiciel Medit

**Participants** : Pascal Frey [correspondant], Eric Saltel.

**Mots clés** : visualisation de maillages.

Medit est un environnement graphique (sous OpenGL) permettant de visualiser de manière interactive des maillages (2D, 3D et surfaces) et des informations associées (champs de solutions, entités spécifiques). Les rotations, translations, zooms, etc. se font de manière naturelle avec la souris.

La diffusion de ce logiciel est liée à des accords de transfert.

## 5.7 Logiciel FreeFem+

**Participants** : Frédéric Hecht [correspondant], Olivier Pironneau [correspondant].

**Mots clés** : maillage, triangle, élément fini, adaptation de maillage, équation aux dérivées partielles, C++.

FreeFem+ est une implémentation d'un langage dédié aux éléments finis qui permet de résoudre des équations aux dérivées partielles simplement sur différents maillages. Il permet aussi de faire de l'adaptation de maillages. Le logiciel a été porté sous les environnements Unix, MacOS et Windows. Ce logiciel est décrit sur le site :

<http://www-rocq.inria.fr/gamma/cdrom/www/freefem/fra.htm>.

## 5.8 Logiciel GAMHIC3D

**Participants** : Houman Borouchaki, Paul Louis George [correspondant], Frédéric Hecht,

Éric Saltel.

**Mots clés :** maillage isotrope contrôlé, tétraèdre, triangulation automatique.

GAMHIC3D, [13] est un module de maillage automatique en tétraèdres d'un domaine défini par une discrétisation (en principe en triangles) de sa surface. Ce module est une extension du module GHS3D au cas d'un problème de maillage contrôlé. On se donne donc une *carte de métriques isotrope* (des tailles) définie de manière discrète aux sommets d'un *maillage de fond*. Le but est alors, partant d'un maillage de la frontière du domaine réputé conforme vis-à-vis de la carte spécifiée, de construire un maillage volumique correspondant conforme à cette même carte.

La diffusion de ce module est liée à des accords de transfert.

## 5.9 Logiciel GHS3D

**Participants :** Paul Louis George [correspondant], Frédéric Hecht, Éric Saltel.

**Mots clés :** maillage, tétraèdre, triangulation automatique.

GHS3D, alias TetMesh-GHS3D, [9], est un module de maillage automatique en tétraèdres d'un domaine défini par une discrétisation (en principe en triangles) de sa surface.

La diffusion de ce module est liée à des accords de transfert. Notons que ce module est déjà intégré dans un certain nombre de codes commerciaux largement diffusés.

## 5.10 Logiciel YAMS

**Participant :** Pascal Frey [correspondant].

**Mots clés :** maillage de surface, décimation, simplification, optimisation.

YAMS est un logiciel destiné au remaillage adapté des maillages de surfaces. La donnée est une triangulation de surface, sur laquelle sont appliquées des modifications topologiques (bascules d'arêtes) et géométriques (bougé de points, création/suppression de sommets). Le but est d'obtenir un maillage simplifié (ou enrichi) correspondant à une carte de tailles donnée (de nature géométrique et/ou physique).

La diffusion de ce module est liée à des accords de transfert.

# 6 Résultats nouveaux

## 6.1 Maillage de surfaces paramétrées

**Participants :** Houman Borouchaki, Patrick Laug.

**Résumé :** *L'objectif est de mailler des surfaces composées de carreaux paramétrés. L'approche retenue est une approche indirecte. On maille d'abord les domaines de paramètres (en tenant compte des propriétés géométriques des carreaux) et on*

*reporte ensuite les maillages anisotropes ainsi obtenus sur la surface, en assurant la compatibilité des interfaces.*

**Mots clés :** surface paramétrée, maillage anisotrope, adaptation de maillage.

On distingue le cas particulier des domaines composés à partir de sphères (utilisés pour des applications en chimie) des domaines paramétrés quelconques.

### 6.1.1 Surfaces composées quelconques

Le problème est de construire des maillages *constrained* de surfaces composées de carreaux paramétrés, où les contraintes sont, d'une part, le respect d'un champ de métriques donné et, d'autre part, la qualité en forme des éléments. La première contrainte indique que le maillage doit respecter localement des tailles (qui peuvent être différentes selon les directions) en chacun de ses sommets et la deuxième exige que les éléments soient aussi réguliers que possible. Rappelons que le maillage d'un carreau (ou d'une nappe) paramétré (qui par défaut est une triangulation de la surface dont tous les sommets appartiennent à la surface) doit vérifier deux propriétés fondamentales :

- $\mathcal{P}_1$  : chaque élément doit être proche de la surface et
- $\mathcal{P}_2$  : chaque élément doit être proche des plans tangents en ses sommets.

La première propriété  $\mathcal{P}_1$  indique que l'écart entre le maillage et la surface peut être borné. Cet écart représente la plus grande distance entre un élément et la surface. La seconde propriété  $\mathcal{P}_2$  traduit localement la continuité d'ordre  $G^1$  de la surface. Un élément est proche du plan tangent en l'un de ses sommets si l'écart angulaire entre l'élément et le plan tangent en ce sommet à la surface peut être borné.

La méthode que l'on propose [12] est une méthode classique qui comprend deux étapes. Il s'agit dans un premier temps de discrétiser les interfaces des carreaux dans  $\mathbf{R}^3$  (première étape) puis de reporter ces discrétisations dans les domaines des paramètres pour générer le maillage de chaque carreau via son domaine des paramètres (deuxième étape), à partir de la discrétisation de sa frontière. Naturellement, ces maillages sont gouvernés par des champs de métriques adéquats de telle manière que les maillages résultants surfaciques :

- vérifient les deux propriétés  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  et
- respectent les requis en termes de métriques et de formes d'éléments.

Celle année, nous avons mis au point un algorithme basé sur les *dérivées discrètes*. En effet, dans notre méthode indirecte, le champ donné de métriques est induit dans chaque domaine de paramètres, ce qui suppose que les dérivées des fonctions paramétriques soient connues. Cette information n'est pas nécessairement fournie par les systèmes de CAO et peut être coûteuse à calculer. Pour cette raison, nous proposons une méthode nouvelle et efficace pour obtenir les dérivées discrètes de ces fonctions.

Soit  $\Sigma$  une surface paramétrée définie par :

$$\sigma : \Omega \longrightarrow \Sigma, \quad (u, v) \longmapsto \sigma(u, v),$$

$\Omega$  étant un domaine de  $R^2$ , et  $\sigma$  une fonction continue de classe  $C^2$ .

Pour un point  $p = (u, v)$  de  $\Omega$ , nous proposons un algorithme pour approcher la dérivée partielle  $\sigma_u$  en un point  $p$ , en se basant sur un schéma de différences finies. Nous utilisons pour cela les notations  $p_u^+ = (u + \delta u, v)$  et  $p_u^- = (u - \delta u, v)$ , où  $\delta u$  est un petit déplacement générique dans la direction  $u$ . La dérivée première par rapport à  $u$ , ou plus précisément la dérivée à droite, à gauche et centrée, peut être approchée par :

$$\sigma_u^+(p) \approx \frac{\sigma(p_u^+) - \sigma(p)}{\delta u} \quad \sigma_u^-(p) \approx \frac{\sigma(p) - \sigma(p_u^-)}{\delta u} \quad \sigma_u(p) \approx \frac{\sigma_u^+(p) + \sigma_u^-(p)}{2}.$$

Il suffit par conséquent de connaître les points  $\sigma(p_u^+)$  et  $\sigma(p_u^-)$ , mais en garantissant que les points  $p_u^+$  et  $p_u^-$  appartiennent au domaine  $\Omega$ . À cette fin, nous considérons différents cas, lorsque  $p = (u, v)$  est situé sur la frontière  $\Gamma$  de  $\Omega$ , ou lorsque  $p = (u, v)$  est situé à l'intérieur de  $\Omega$ .

Nous obtenons ainsi la dérivée première  $\sigma_u$ , et de façon similaire  $\sigma_v$  ainsi que les dérivées d'ordres supérieurs. Cette étude est détaillée dans [16].

Ces résultats ont été intégrés dans le maillage surfacique BLSURF, qui génère le maillage d'une surface composée de plusieurs carreaux paramétrés en respectant un champ de tailles spécifiées (cf. section Logiciels).

### 6.1.2 Surfaces moléculaires (sphériques ou toriques)

Les surfaces moléculaires sont maintenant largement utilisées pour des simulations numériques dans le domaine de la chimie. Pour une molécule donnée, plusieurs types de surfaces sont définis, notamment la surface de Van der Waals (VWS), la surface accessible au solvant (SAS) et la surface exclue au solvant (SES). Les surfaces VWS et SAS, qui sont formées uniquement de carreaux sphériques, ont été traitées précédemment. Cette année, nous avons poursuivi nos études sur les surfaces SES, qui comprennent à la fois des carreaux sphériques et toriques.

La qualité des maillages générés par notre méthode permet d'améliorer les performances des modèles utilisés en chimie, voire même d'aborder de nouveaux types de problèmes [17].

## 6.2 Maillage de surfaces discrètes

**Participants :** Houman Borouchaki, Pascal Frey, Éric Saltel.

**Mots clés :** surface discrète, décimation, remaillage, optimisation.

**Résumé :** *Le but est de remailler une surface en tenant compte des propriétés géométriques de celle-ci (courbures, etc.) et éventuellement d'une carte de métriques (tailles et/ou directions). La surface est définie, du point de vue géométrique, par un maillage (i.e., de manière discrète) éventuellement enrichi d'informations sur les singularités (points singuliers, arêtes vives) présentes et de toutes autres informations disponibles (normales, par exemple).*

Cette étude poursuit le travail des années passées sur ce thème et s'appuie sur des résultats obtenus précédemment, notamment [11], et a conduit au développement du logiciel



YAMS. Les domaines d'applications concernés sont multiples et vont de la visualisation graphique (maillages *géométriques*) à la simulation numérique par des méthodes d'éléments finis (maillages *de calcul*).

L'objectif visé est d'extraire, à partir d'une triangulation, un maillage qui est une approximation géométrique (linéaire par morceaux) de la surface et qui comporte moins d'éléments (si possible) que la donnée initiale. Les contraintes en termes de qualité (*aspect ratio*) des éléments et de taille (nombre d'éléments) du maillage résultant dépendant généralement de l'application envisagée, le logiciel propose plusieurs options de simplification et/ou d'enrichissement [19], [18]. Toutefois, quelle que soit l'application envisagée, un contrôle rigoureux de l'écart entre le maillage et la surface sous-jacente est fondamental. Cet écart correspond localement (pour un triangle) à la distance maximale de cet élément à la surface. Un maillage *géométrique* est donc un maillage satisfaisant cette contrainte (c'est-à-dire bornant l'écart correspondant).

**Maillage géométrique.** La première étape consiste à construire un maillage géométrique. Pour cela, la triangulation initiale est simplifiée sur un critère d'approximation géométrique basé sur la distance de Hausdorff. Ainsi, le maillage résultant ne s'écarte pas de la surface de référence de plus d'une certaine tolérance. Des contraintes relatives à la taille ainsi qu'à la qualité des éléments sont ajoutées de manière à éviter la formation d'éléments dégénérés (qui pourraient fausser les calculs numériques ultérieurs).

**Remaillage.** À partir de ce maillage géométrique, une métrique géométrique intégrant les courbures et les directions principales en tous points est calculée [11]. Ceci permet de définir une surface de référence, la *géométrie*. Dans le cas d'un schéma de maillage adaptatif, la métrique géométrique est intersectée avec une métrique dérivée du calcul (forunie généralement par un estimateur d'erreur).

Le processus de remaillage vise à obtenir des arêtes de longueur un dans la métrique. Pour cela, il s'appuie sur les opérations suivantes :

- l'ajout de points sur la surface,
- la suppression de points trop proches,
- l'optimisation par bougé de points et bascules d'arêtes.

Les informations relatives à la métrique géométrique (directions principales) sont utilisées pour contrôler les opérations précédentes. Ceci nécessite de tenir à jour la correspondance entre les points de la surface et les triangles correspondants dans la géométrie.

### 6.3 Surfaces Delaunay admissibles

**Participants :** Houman Borouchaki, Pascal Frey, Paul Louis George, Philippe Pebay.

**Mots clés :** surface Delaunay-admissible.

**Résumé :** *On établit si une triangulation de surface est Delaunay admissible ou non. Dans ce dernier cas, on propose une méthode permettant de rendre, par modifications locales, cette triangulation de surface Delaunay conforme [10].*

Un maillage de surface (en triangles) est *Delaunay admissible* si ses éléments satisfont un critère tel que toute triangulation de Delaunay du nuage de points associés (les sommets de ces triangles) construit des tétraèdres dont l'ensemble des faces comprend exactement l'ensemble des triangles initiaux.

Cette propriété permet de multiples applications (voir plus bas). On a caractérisé (avec Ph. Pebay dans le cadre de sa thèse (Université Pierre et Marie Curie), soutenue en Juin 2000) les éléments vérifiant ou non la propriété. Puis on a trouvé des algorithmes de modification d'un maillage de surface donné de façon à le rendre Delaunay admissible.

#### 6.4 Contraintes par partition et problème d'existence d'un maillage d'un polyèdre arbitraire

**Participants :** Houman Borouchaki, Paul Louis George.

**Mots clés :** existence.

**Résumé :** *La construction d'un maillage simplicial d'un polyèdre arbitraire est un problème connu comme étant NP-complet. On étudie une méthode de construction qui montre l'existence d'un tel maillage et, de plus, qui n'est de complexité non polynomiale que dans le cas le pire.*

Cette méthode constructive consiste à découper les arêtes et faces contraintes, [15], en ajoutant les points d'intersection de ces entités avec les faces et arêtes d'un maillage de Delaunay construit de manière classique. Ensuite, on montre que les points ainsi ajoutés peuvent être détruits ou bougés de manière à ce que le résultat contienne effectivement les contraintes initiales (*i.e.* non découpées). Outre le résultat théorique important ci-dessus, cette étude a de nombreuses applications, par exemple dans le cadre du contrat européen MAGIC-FEAT.

#### 6.5 Maillage des courbes implicites

**Participants :** Pascal Frey, Jérôme Turatello.

**Mots clés :** courbe implicite, discrétisation.

**Résumé :** *On rencontre les courbes implicites dans de nombreuses applications. Il est donc intéressant d'en déduire une approximation rapide et précise, par exemple au moyen d'une approximation linéaire par morceaux (*i.e.*, un maillage). Le problème qu'on se pose ici est de partitionner une courbe implicite en segments, de manière à répondre à certains critères spécifiques (longueur du segment proportionnelle à la courbure locale, contrôle de la variation de taille entre segments adjacents, etc.).*

Plusieurs techniques d'approximation des courbes implicites ont été proposées, souvent coûteuses (en temps et/ou en mémoire) et, dans certains cas, imprécises. Nous proposons ici une méthode de "suivi adaptatif" de la courbe. À partir d'un point de départ (dont le choix obéit à certains critères), une case est définie dont un des côtés contient ce point. L'analyse des valeurs aux sommets de la case permet d'identifier le côté par lequel la courbe ressort de la case. Les éventuels cas d'ambiguïté géométrique sont résolus en appliquant une rotation d'angle  $\theta < 90$  degrés à la case. Il faut noter que la dimension des cases n'est pas arbitraire (sous peine de conduire à un maillage uniforme), elle est liée à la courbure locale de la courbe et à la précision souhaitée et par conséquent cette taille varie sur le domaine. De même l'orientation des cases est dictée par la tangente à la courbe au point considéré. Cette méthode conduit à construire des maillages contrôlés de courbes implicites, en combinant les avantages des méthodes de suivi de contour et d'adaptation locale (vitesse et qualité de l'approximation géométrique).

## 6.6 Génération automatique de maillages hexaédriques

**Participant** : Loic Maréchal.

**Mots clés** : hexaèdres, octree, maillage.

**Résumé** : *La génération automatique de maillages hexaédriques reste, aujourd'hui, un enjeu majeur de cette discipline. Le projet Hexotic tente de relever le défi en se basant sur la méthode octree. La géométrie issue d'un tel arbre se prêtant, de par sa nature, à la génération de maillage hexaédriques.*

Ce projet consiste à créer une boîte noire prenant une triangulation de surface quelconque en entrée et ressortant un maillage composé uniquement d'hexaèdres conformes remplissant le volume défini par la surface.

L'algorithme se base sur la représentation de la triangulation de surface par un arbre *octree*. Celui-ci peut être contrôlé par divers critères de subdivision comme la géométrie de la surface, ou la taille de ses triangles. Cet arbre constitue le point de départ de l'algorithme décrit ci-dessous :

1. Création d'un maillage de fond:
  - (a) La méthode *octree* est tout d'abord utilisée pour créer un premier maillage de fond non-conforme.
  - (b) Puis, l'insertion de jeux d'hexaèdres prédéfinis permet de transformer cet octree en maillage hexaédrique conforme.
2. Recherche de la frontière par pliage des hexaèdres:
  - (a) Recherche des faces des hexaèdres les plus proches de la surface triangulée d'origine, ce qui constituera une frontière approchée du domaine à mailler.

- (b) Déplacement des nœuds de cette frontière pour approcher au mieux la géométrie du domaine. Les nœuds à l'intérieur du volume sont déplacés simultanément afin de garantir une bonne qualité d'éléments dans le maillage final.
- (c) Les différents sous-domaines sont énumérés et seuls ceux requis par l'utilisateur sont conservés.

Un premier prototype est aujourd'hui opérationnel. Il a permis de mieux cerner les problèmes posés par la méthode choisie et de proposer des améliorations ou des solutions de substitution.

Points restant à améliorer :

- une meilleure méthode pour trouver la frontière optimale parmi les faces d'hexaèdres est nécessaire,
- le pliage de cette surface devra être fait de manière relaxée et contrôlée afin de garantir la validité des éléments près de la frontière du domaine,
- une meilleure insertion des couches limites. Une subdivision d'éléments existante serait plus robuste que la «levée» d'un front à partir de la surface,
- un modèle de description de surface plus fin que le plan tangent devra être utilisé afin de mieux respecter la géométrie d'origine lors de la régularisation du maillage.

Point restant à aborder :

- respect des angles saillants, arêtes ou points caractéristiques de la géométrie que l'on doit impérativement retrouver dans le maillage hexaédrique final. L'actuelle implémentation ne produisant que des formes «molles».

## 6.7 Publication générale

**Participants :** Pascal Frey, Paul Louis George.

**Mots clés :** triangulation, maillage.

**Résumé :** *Traduction en anglais du livre "Maillages. Application aux éléments finis" [3] sur les différentes méthodes de génération, modifications, optimisation et adaptation de maillage.*

Dans cet ouvrage, sont abordés les différentes techniques de constructions de maillages, les outils de modification, d'évaluation et d'optimisation ainsi que les méthodes de construction de maillages adaptés ou les aspects liés au parallélisme. Outre l'étude théorique des méthodes sont examinés de nombreux aspects pratiques (structures et algorithmes de base, par exemple). Des personnes extérieures au projet Gamma ont contribué à ce livre, parmi lesquelles F. Noël (Université de Grenoble), F. Cazals (projet Prisme, Inria-Sophia) et M. Lorient (Simulog). Les exemples ont été fournis par les membres du projet ou par le biais de collaborateurs extérieurs.

## 7 Contrats industriels (nationaux, européens et internationaux)

### 7.1 Simulog

**Résumé :** *Simulog, filiale de l'Inria, est, par contrat, chargée de la diffusion des codes développés initialement dans le projet Gamma. À ce titre, Simulog effectue des opérations de commercialisation et de transfert de technologie de maillages.*

Simulog s'occupe de la commercialisation des maillages surfaciques et volumiques et participe à la validation puis à l'industrialisation des codes correspondants.

### 7.2 Dassault Aviation

**Résumé :** *Mise à disposition des modules de maillage et remaillage des surfaces.*

Cette collaboration s'inscrit dans le cadre de la thèse de O. Roques (dans le cadre d'une convention CIFRE) relative au maillage anisotrope en dimension 3. L'étude a porté notamment sur la construction de couches limites et le maillage géométrique de surfaces.

### 7.3 SNECMA

Poursuite d'une thèse, D. Leservoisier, ayant trait aux calculs en trois dimensions de problèmes de mécanique des fluides comportant une forte anisotropie. Mise à disposition des maillages GHS3D (cas classique), GAMHIC3D (mailleur contrôlé isotrope) et développement d'un prototype, GAMANIC3D (mailleur contrôlé anisotrope). Thèse en collaboration avec le projet Sinus (INRIA-Sophia).

## 8 Actions régionales, nationales et internationales

### 8.1 Actions européennes

#### 8.1.1 Projet Magic-Feat

**Participants :** P.L. George, P. Frey.

**Mots clés :** simulation, processus, fabrication, semi-conducteurs.

Ce projet concerne les processus de simulation et de fabrication des semi-conducteurs. À ce titre, de nombreux problèmes de construction de maillages sont rencontrés dus à la spécificité des géométries intéressées (zones minces, surfaces déformables, etc.). Le projet intervient dans la construction automatique de maillages volumiques à partir de la donnée de surface mal adaptée et intervient également dans le remaillage de surfaces.

## 8.2 Actions nationales

### 8.2.1 Action en EEG

**Participants** : P.L. George, P. Frey.

**Mots clés** : EEG.

Cette action concerne la simulation des champs électriques dans le cerveau. Elle regroupe plusieurs projets INRIA (sous la direction de O. Faugeras) et une équipe du Cermics. La contribution de Gamma porte sur la mise à disposition des logiciels de maillages de surfaces et de volumes nécessaires aux simulations envisagées.

### 8.2.2 Arc COSTIC

**Participants** : P.L. George, P. Frey.

**Mots clés** : Courbes et surfaces implicites.

Cette ARC INRIA a pour objectif d'étudier et de développer des méthodes performantes pour analyser, représenter et manipuler des objets algébriques 3D. Dans ce contexte, nous avons développé une méthode permettant de mailler des courbes implicites.

## 8.3 Visites et invitations de chercheurs

**Participant** : Pr. Lu.

Le professeur Lu (Université de Shanghai) a passé deux mois (oct.-dec.) au sein du projet pour traduire en chinois le livre "Triangulation de Delaunay et maillage" [5].

## 9 Diffusion de résultats

### 9.1 Participation à des colloques, séminaires, invitations

#### 9.1.1 Paul Louis George

- "Tet meshing", 31<sup>th</sup> Computational Fluid Dynamics, Lecture Series 2000-05, VKI, Belgique.
- "Adaptive tet meshing", Eccomas 2000, Barcelona, Spain, sept [21].
- "An efficient algorithm for 3D adaptive meshing", 2nd Int. Conf. on Engineering Computational Technology, Leuven. Belgium, sept. [20].

#### 9.1.2 Pascal Frey

- "Efficient decimation of large size surface meshes", Conférence Scanning'2000, mai, Paris.
- "About surface remeshing", International Meshing Roundtable, oct., New Orleans, USA.

- "Maillage des courbes implicites", Journées de Géométrie algorithmique, sept., Luminy.
- "Génération de maillages 3D pour des méthodes d'éléments finis", Séminaire Dassault Systèmes, nov. Paris.

### 9.1.3 Patrick Laug

- "Automatic Generation of Finite Element Meshes for Molecular Surfaces", Ecomas 2000, Barcelona, Spain, sept.
- "Adaptive Parametric Surface Meshing Based on Discrete Derivatives", 7th Int. Conf. Numerical grid generation in Computational Field Simulations, Vancouver, Canada, sept.
- "Minimal variational surfaces and quality triangular meshes", 9th Int. Meshing Roundtable, New Orleans, oct. [14]

## 9.2 Enseignement

- P.L. George donne à l'université de Créteil (DEA mécanique automobile), un cours sur les techniques de maillages.
- P. Laug donne au Pôle Universitaire Léonard de Vinci un cours sur la programmation en Fortran 90.
- P. Frey donne au Pôle Universitaire Léonard de Vinci un cours sur les techniques de maillages pour des méthodes d'éléments finis.

## 10 Bibliographie

### Ouvrages et articles de référence de l'équipe

- [1] H. BOROUCAKI, P.L. GEORGE AND B. MOHAMMADI, «Delaunay mesh generation governed by metric specifications. Part 2: Application examples», *Finite Elements in Analysis and Design* 25, 1997, p. 85–109.
- [2] H. BOROUCAKI, P.L. GEORGE, F. HECHT, P. LAUG AND E. SALTEL, «Delaunay mesh generation governed by metric specifications. Part 1: Algorithms», *Finite Elements in Analysis and Design* 25, 1997, p. 61–83.
- [3] P.J. FREY AND P.L. GEORGE, *Meshing. Applications to Finite Elements*, Hermès Science Publications, Paris, 2000.
- [4] P.J. FREY ET P.L. GEORGE, *Maillages. Applications aux éléments finis*, Hermès Science Publications, Paris, 1999.
- [5] P.L. GEORGE AND H. BOROUCAKI, *Delaunay triangulation and meshing. Application to finite elements*, Hermès Science Publications, Paris, 1998.
- [6] P.L. GEORGE ET H. BOROUCAKI, *Triangulation de Delaunay et maillage. Applications aux éléments finis*, Hermès Science Publications, Paris, 1997.

- [7] P.L. GEORGE, F. HECHT AND E. SALTEL, «Automatic mesh generator with specified boundary», *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg* 92, 1991, p. 269–288.
- [8] P.L. GEORGE, *Génération automatique de maillages. Applications aux méthodes d'éléments finis*, RMA 16, Masson, 1991.
- [9] P.L. GEORGE, «Improvement on Delaunay based 3D automatic mesh generator», *Finite Elements in Analysis and Design* 25, 1997, p. 297–317.

### Thèses et habilitations à diriger des recherches

- [10] P. PEBAY, *Delaunay-admissibilité a priori en dimensions 2 et 3*, thèse de doctorat, Université Paris 6, 2000.

### Articles et chapitres de livre

- [11] H. BOROUCAKI ET P.J. FREY, «Maillage géométrique des surfaces», *Revue Européenne des Éléments Finis* 8, 1999, p. 47–75.
- [12] H. BOROUCAKI, P. LAUG AND P.L. GEORGE, «Parametric Surface Meshing Using a Combined Advancing-Front Generalized-Delaunay Approach», *Int. j. numer. methods eng.*, à paraître.
- [13] P.L. GEORGE ET H. BOROUCAKI, «Génération automatique de maillages tridimensionnels respectant une carte de taille», *Revue Européenne des Éléments Finis* 7, 1999, p. 339–363.

### Communications à des congrès, colloques, etc.

- [14] H. BOROUCAKI, P. LAFON, P. LAUG AND P.L. GEORGE, «Minimal variational surfaces and quality triangular meshes», *in: 9th Int. Meshing Roundtable*, New Orleans, La, USA, 2000.
- [15] H. BOROUCAKI, S.H. LO AND P.L. GEORGE, «Boundary enforcement by facet splits in Delaunay based mesh generation», *in: 7th Int. Conf. Numerical grid generation in Computational Field Simulations*, Vancouver, Canada, 2000.
- [16] P. LAUG AND H. BOROUCAKI, «Adaptive Parametric Surface Meshing Based on Discrete Derivatives», *in: 7th Int. Conf. Numerical grid generation in Computational Field Simulations*, Vancouver, Canada, 2000.
- [17] P. LAUG AND H. BOROUCAKI, «Automatic Generation of Finite Element Meshes for Molecular Surfaces», *in: Eccomas*, Barcelona, Spain, 2000.
- [18] P.J. FREY, «About surface remeshing», *in: Proceedings of 9th IMR*, New Orleans, La, USA, 2000.
- [19] P.J. FREY, «Efficient decimation of large-size surface meshes», *in: Proceedings of Scanning'2000 Conference*, Paris, 2000.
- [20] P.L. GEORGE, H. BOROUCAKI AND P. LAUG, «An efficient algorithm for 3D adaptive meshing», *in: 2nd Int. Conf. on Engineering Computational Technology*, Leuven, Belgium, 2000.
- [21] P.L. GEORGE, «Adaptive tet meshing», *in: Eccomas*, Barcelone, Spain, 2000.



---

**Rapports de recherche et publications internes**

- [22] P. LAUG AND H. BOROUCAKI, «BLSURF - Mesh Generator for Composite Parametric Surfaces - User's Manual», *Technical Report n° RT-0235*, INRIA, November 1999, <http://www.inria.fr/rrrt/rt-0235.html>.
- [23] P. LAUG ET H. BOROUCAKI, «BLSURF - Maillageur de surfaces composées de carreaux paramétrés - Manuel d'utilisation», *Rapport Technique n° RT-0232*, INRIA, juin 1999, <http://www.inria.fr/rrrt/rt-0232.html>.