

Projet Gamma

Génération Automatique de Maillages et Méthodes d'Adaptation

Rocquencourt

THÈME 4B



*R*apport
d'Activité

1999

Table des matières

1	Composition de l'équipe	3
2	Présentation et objectifs généraux	4
3	Fondements scientifiques	4
3.1	Méthodes de génération maillage	5
3.1.1	Méthode de type Delaunay	5
3.1.2	Méthode frontale	5
3.1.3	Autres méthodes	5
3.1.4	Géométrie algorithmique	6
3.2	Méthodes d'adaptation de maillage	6
3.3	Définition géométrique	7
3.3.1	CAO	7
3.3.2	CAO discrète	7
3.3.3	Analyse d'une géométrie	7
3.3.4	Bases de données	7
4	Domaines d'applications	7
4.1	Panorama	7
4.2	E.D.P. et éléments finis	8
4.3	E.D.P. et adaptation	8
4.4	Maillage des surfaces	8
5	Logiciels	8
5.1	Logiciel Bamg	9
5.2	Logiciel BL2D	9
5.3	Logiciel BLMESH	10
5.4	Logiciel BLSURF	10
5.5	Logiciel Emc2	10
5.6	Logiciel FreeFem+	11
5.7	Logiciel GAMHIC3D	12
5.8	Logiciel GHS3D	12
5.9	Logiciel YAMS	12
6	Résultats nouveaux	12
6.1	Maillage de surfaces paramétrées	12
6.1.1	Surfaces composées quelconques	13
6.1.2	Surfaces moléculaires (sphériques ou toriques)	14
6.2	Maillage de surfaces discrètes	14
6.3	Surfaces Delaunay admissibles	16
6.4	Maillage plan	17
6.5	Frontières déformables - forgeage	18
6.6	Maillage volumique	20

6.7	Publication générale	20
7	Contrats industriels (nationaux, européens et internationaux)	21
7.1	Simulog	21
7.2	Dassault Aviation	21
7.3	Dassault Systèmes	21
7.4	EDF	22
7.5	SNECMA	22
8	Actions régionales, nationales et internationales	22
8.1	Actions européennes	22
8.1.1	Projet Magic-Feat	22
8.2	Actions nationales	22
8.2.1	Action en EEG	22
8.3	Visites et invitations de chercheurs	22
9	Diffusion de résultats	23
9.1	Participation à des colloques, séminaires, invitations	23
9.1.1	Paul Louis George	23
9.1.2	Frédéric Hecht	23
9.1.3	Patrick Laug	23
9.2	Enseignement	23
10	Bibliographie	24

1 Composition de l'équipe

Responsable scientifique

Paul Louis George [DR]

Responsable permanent

Patrick Laug [CR]

Assistante de Projet

Maryse Desnous [TR (en commun avec Macs et M3N)]

Personnel Inria

Pascal Frey [CR]

Éric Saltel [DR]

Conseiller scientifique

Olivier Pironneau [Professeur, Université Paris 6]

Collaborateurs extérieurs

Houman Borouchaki [Professeur, Université de Technologie de Troyes]

Frédéric Hecht [Professeur, Université Paris 6]

Chercheurs doctorants

Philippe Pebay [éducation nationale (INSA) et Université Paris 6]

Rachid Ouachtaoui [Université Paris 6]

D. Leservoisier [Snecma]

Olivier Roques [Dassault Aviation, Université Paris 6]

2 Présentation et objectifs généraux

Une branche importante des sciences de l'ingénieur s'intéresse aux calculs des solutions d'équations aux dérivées partielles très variées (en mécanique du solide, en mécanique des fluides, en modélisation de problèmes thermiques, ...) par la méthode des éléments finis. Cette méthode utilise comme support spatial des calculs un maillage du domaine sur lequel les équations sont formulées. Par suite, les algorithmes (de construction) de maillages occupent un rôle important dans toute simulation par la méthode des éléments finis d'un problème modélisé en équations aux dérivées partielles. En particulier, la précision, voire la validité, des solutions calculées est liée aux propriétés du maillage utilisé comme support ^[Cia91].

Le projet GAMMA a été créé en 1996. Les thèmes du projet regroupent un ensemble d'activités concernant les points indiqués ci-dessus, en particulier, l'aspect génération automatique de maillages afin de construire les supports utilisés par la méthode des éléments finis. Sont également étudiés les aspects post-traitement et visualisation des résultats issus de tels calculs.

L'évolution de la demande en termes de génération automatique de maillages implique une évolution des méthodes classiques de création de maillages vers des méthodes permettant de construire des maillages contrôlés. Les maillages doivent donc être soit isotropes, le contrôle portant sur des tailles souhaitées, soit anisotropes, le contrôle portant à la fois sur des directions et des tailles selon ces dernières.

Le développement d'algorithmes de maillages gouvernés sert de support naturel à la conception de boucles de maillages adaptatifs qui, via un estimateur d'erreurs *a posteriori*, permettent de contrôler la qualité des solutions.

Ces préoccupations amènent à considérer le problème du maillage des domaines de calculs en eux-mêmes tout comme celui du maillage ou du remaillage des courbes et surfaces, frontières de ces domaines.

La taille, en termes de nombre de nœuds, des maillages nécessaires pour certaines simulations, amène à travailler sur la parallélisation des processus de calculs. Cette problématique conduit à s'intéresser à l'aspect parallélisation au niveau des processus de génération des maillages plutôt qu'au niveau des algorithmes de maillages proprement dits.

Simultanément, le volume des résultats obtenus dans de telles simulations, nécessite d'envisager le post-traitement de ces résultats en parallèle ou par des méthodes appropriées.

Les objectifs du projet Gamma consistent à étudier l'ensemble des points mentionnés ci-dessus afin de rendre automatique le calcul de la solution d'un problème donné avec une précision imposée au départ.

3 Fondements scientifiques

La construction d'algorithmes de maillages fait appel à un ensemble de disciplines scientifiques incluant notamment la géométrie euclidienne, différentielle, discrète ou algorithmique. Par ailleurs, les aspects de complexité d'algorithme, minimisations des ressources mémoire et les problèmes de précision numérique sont pris en compte.

[Cia91] P. G. CIARLET, *Basic Error Estimates for Elliptic Problems, II*, North Holland, 1991.

3.1 Méthodes de génération maillage

3.1.1 Méthode de type Delaunay

La base théorique des méthodes de maillage de type Delaunay est fournie par l'ensemble des résultats relatifs aux méthodes de triangulation de Delaunay [Boi95]. Dans le cadre du maillage, l'aspect triangulation (de l'enveloppe convexe d'un nuage de points) ne représente qu'une part de l'algorithmique à mettre en place. De nouveaux problèmes se posent qui concernent les triangulations *contraintes* (bien résolus en deux dimensions, moins clairs en trois dimensions), la façon de construire les points internes aux domaines (non convexes) considérés, les méthodes d'optimisation et, plus généralement, la définition de ce qu'est un maillage acceptable pour une application de type éléments finis, [Geo97].

Par ailleurs, l'approche développée en deux dimensions et en trois dimensions se prête à une extension *anisotrope*. Un mailleur de type Delaunay anisotrope en trois dimensions a des applications dans les problèmes où des directions sont à privilégier (mécanique des fluides (chocs, couches limites, ...)). En deux dimensions, on retrouve le même type d'applications et, de plus, une méthode qui s'applique à la construction de maillages pour les surfaces paramétrées. En effet, par définition, la géométrie d'une surface est intrinsèquement de nature anisotrope (rayons de courbure).

3.1.2 Méthode frontale

En deux dimensions, la méthode frontale est une méthode bien connue et utilisée depuis longtemps, [Geo71]. Un front initial est formé par les arêtes composant la discrétisation des frontières du domaine considéré. Partant d'une de ces arêtes, un point est choisi ou construit puis connecté avec celle-ci pour former un triangle. Le front est alors mis à jour et le même processus est poursuivi tant que le front n'est pas vide. En trois dimensions, [Loh96], cette méthode pose un certain nombre de difficultés liées en particulier au fait qu'il n'existe pas de théorie permettant de définir à coup sûr un algorithme efficace et convergent.

Les problèmes de convergence de l'algorithme, de validité et de qualité des maillages générés sont résolus de manière satisfaisante en se basant sur un maillage de fond et en utilisant des structures de données géométriques adaptées.

3.1.3 Autres méthodes

D'autres méthodes de génération de maillages existent. Une méthode importante est basée sur une utilisation "détournée" des structures de données en arbre, telle que le PR-quadtrees. Le domaine est immergé dans une boîte. Celle-ci est divisée de manière récursive en cellules

[Boi95] BOISSONNAT, J.D. ET YVINEC, M., *Géométrie algorithmique*, Ediscience, 1995.

[Geo97] GEORGE, P.L. ET BOROUCHAKI, H., *Triangulation de Delaunay et maillage. Applications aux éléments finis*, Hermès, 1997.

[Geo71] A. GEORGE, *Computer implementation of the finite element method*, thèse de doctorat, Dep. of Computer Science, Stanford, 1971.

[Loh96] R. LOHNER, « Progress in grid generation via the advancing front technique », *Engineering with computers*. 12, 1996, p. 186–210.

selon une structure d'arbre de façon à vérifier un certain critère (ou test d'arrêt). Les cellules terminales servent alors de support à la création des éléments du maillage, [She91].

3.1.4 Géométrie algorithmique

La géométrie algorithmique, [Pre85], [Boi95], ou du moins des parts importantes de celle-ci, donne un support théorique et des indications pratiques pour le développement de nombreux algorithmes utilisés dans le contexte de la génération de maillage.

Les questions générales concernant les structures de données, les algorithmes de base (tri, recherche, ...) et la complexité des algorithmes trouvent naturellement leur place dans nos activités.

Toutes les études sur les triangulations de Delaunay donnent un certain nombre de résultats utiles dans les méthodes de maillage. Parmi ceux-ci, les preuves d'existence ou non de solution indiquent s'il peut être envisagé de chercher des algorithmes dérivés des résultats abstraits ou s'il convient de s'orienter vers des algorithmes de nature plus heuristique.

3.2 Méthodes d'adaptation de maillage

Dans une simulation numérique par des méthodes d'éléments finis, la qualité en forme et en taille des éléments du maillage support est importante, en raison de son effet sur la précision des solutions numériques et sur la convergence du schéma numérique utilisé lors du calcul [Cia91], [Ver96]. L'adaptation des maillages au comportement physique du phénomène étudié est un moyen de réduire les temps de calcul et d'améliorer la précision des résultats numériques¹. La génération du maillage est alors gouvernée par ces résultats pour obtenir un nouveau maillage mieux adapté au phénomène physique modélisé.

Le principe de base pour gouverner un algorithme de construction de maillage est d'introduire la notion de *longueur unité* et de piloter la méthode de façon à construire des arêtes de cette longueur. Cette longueur unité est mesurée dans le champ de métriques correspondant au problème étudié. Ce champ n'est autre qu'une carte de spécifications de tailles ou de directions et de tailles liées, d'une part, à l'analyse des solutions du problème traité via un estimateur d'erreurs approprié et, d'autre part, à des contraintes de nature géométrique.

L'idée pour l'adaptation est alors d'utiliser des algorithmes de maillage gouvernés en les insérant dans une boucle de calculs. Chaque pas de la boucle comprend une phase de génération de maillage, une phase de résolution pour trouver la solution correspondante, une phase

1. Le critère d'adaptation est basé sur un estimateur d'erreurs *a posteriori* et le résultat de l'analyse est traduit en termes de métriques associées aux noeuds du maillage support du calcul.

[She91] SHEPHARD, M. S. AND GEORGES, M. K., « Automatic Three-Dimensional Mesh Generation by the Finite Octree Technique », *Int. J. Numer. Methods Eng.* 32, 4, 1991, p. 709-749.

[Pre85] PREPARATA, F.P. AND SHAMOS, M.I., *Computational geometry, an introduction*, Springer-Verlag, 1985.

[Boi95] BOISSONNAT, J.D. ET YVINEC, M., *Géométrie algorithmique*, Ediscience, 1995.

[Cia91] P. G. CIARLET, *Basic Error Estimates for Elliptic Problems, II*, North Holland, 1991.

[Ver96] R. VERFURTH, *A review of a posteriori error estimation and adaptive refinement techniques*, Wiley-Teubner, 1996.

d'analyse de cette solution et, si besoin est, le processus complet est répété jusqu'à obtention d'une solution de précision donnée (au sens de l'estimateur d'erreurs).

3.3 Définition géométrique

3.3.1 CAO

En trois dimensions, les domaines à mailler sont définis via leur frontière (surface). Au niveau industriel, ces surfaces sont produites par des systèmes de CAO. Néanmoins, deux observations immédiates indiquent que quelques difficultés sont à attendre. En premier lieu, il n'y a pas une mais de nombreuses définitions pour une surface dans les codes de CAO. En second, ces systèmes n'ont pas été originellement prévus pour fournir des maillages au sens éléments finis mais plutôt à des fins de visualisation et de fabrication.

3.3.2 CAO discrète

Une idée simple pour pallier les difficultés mentionnées ci-dessus est de choisir une définition discrète des géométries. Cette CAO discrète est alors relativement facile à utiliser par un mailleur et, en particulier, permet d'éviter d'avoir un couplage direct avec tel ou tel code de CAO, rendant ainsi possible le développement autonome de processus génériques de maillage (en particulier en adaptation de maillages).

3.3.3 Analyse d'une géométrie

Les problèmes de maillage de surfaces nécessite l'analyse de la qualité, en un sens à préciser, des maillages construits. L'analyse des surfaces paramétrées (définies via un espace paramétrique) ou discrètes (définies via un maillage) conduit à chercher des estimateurs fiables quantifiant les écarts de ces surfaces aux maillages censés les approcher.

3.3.4 Bases de données

Les maillages sont construits en vue d'applications de type éléments finis (bien que d'autres applications soient envisageables, visualisation et réalité virtuelle en particulier). Par suite, il est nécessaire de définir des structures de données appropriées permettant la communication entre le mailleur et les autres étapes d'un processus de calcul.

Réaliser une boucle de calculs adaptatifs ou encore mener ce type de travail en parallèle (pour pouvoir traiter des maillages de plusieurs dizaines ou centaines de millions d'éléments) implique que la définition de ces structures de données permette l'accès aux différentes informations utiles (communication entre processeur, transfert de données, liens avec la géométrie, etc.).

4 Domaines d'applications

4.1 Panorama

Mots clés : élément fini, résolution d'E.D.P., adaptation et contrôle d'erreurs, réalité

virtuelle.

Tout calcul par éléments finis ou par volumes finis, dans une certaine mesure, utilise comme support spatial un maillage. Ce dernier sert à discrétiser le domaine où le problème est formulé en l'approchant par l'union des éléments formant son maillage. Par suite, toute simulation numérique via ces méthodes nécessite la construction d'un maillage. Par ailleurs, les maillages de surfaces ont des applications autres, en particulier, en visualisation et en réalité virtuelle (animation, compression d'image, etc.).

4.2 E.D.P. et éléments finis

Les applications sont ici les applications classiques indiquées ci-dessus. On trouve donc naturellement des applications en mécanique du solide, en mécanique des fluides, en électromagnétisme, en modélisation thermique, en chimie, etc.

4.3 E.D.P. et adaptation

L'adaptation de maillage couplée aux estimateurs d'erreurs permet d'envisager de faire, au niveau industriel, des calculs avec un contrôle automatique d'erreurs. On trouve déjà, en statique pour la mécanique du solide, des produits basés sur ce type de techniques. Le but est évidemment d'étoffer les plages d'utilisation en abordant les cas dynamiques et des problèmes physiques plus compliqués (non-linéaires, en particulier).

4.4 Maillage des surfaces

Mailler les surfaces est un pré-requis fondamental pour aborder le maillage des domaines tridimensionnels. En effet, les mailleurs automatiques de tels volumes utilisent, en général, le maillage de leur frontière comme donnée. De plus, la qualité de ce maillage de surface conditionne, dans une large mesure, la qualité du maillage tridimensionnel construit. Par ailleurs, les maillages de surfaces permettent le rendu réaliste des géométries de celles-ci en minimisant, selon certains critères, le nombre d'éléments assurant ce rendu. Les techniques de décimation, par exemple, rendent possible la construction de maillages de tailles différentes (en nombre d'éléments) mais d'aspect visuel identique selon le point d'observation (plus on s'éloigne, moins le maillage est riche en éléments). L'effet immédiat est la rapidité de l'affichage.

5 Logiciels

La diffusion des logiciels issus des travaux de recherche du projet Gamma est effectué, à ce jour, de deux façons. La plupart des logiciels en deux dimensions sont accessibles à tous (sauf pour usage commercial) tandis que les autres logiciels, pour le cas des surfaces et en trois dimensions en particulier, font l'objet de diffusion ou de transfert au travers d'accords précis de nature scientifique ou de type commercial. À ce titre, l'équipe a mis dans le domaine public les logiciels BL2D, Emc², Bamg et FreeFEM/GFEM qui sont documentés et accessibles sur le site :

`ftp://ftp.inria.fr/INRIA/Projects/Gamma`

Nom	Dimension	Disponibilité
Bamg	2D	domaine public
BL2D	2D	domaine public
BLMESH	2D	transfert
BLSURF	3D surfacique	transfert
Emc2	2D	domaine public
FreeFem+	2D	domaine public
GAMHIC3D	3D volumique	transfert
GHS3D	3D volumique	transfert
YAMS	3D surfacique	transfert

TAB. 1 – *Tableau des logiciels et des modules.*

Pour la diffusion des autres logiciels (non présents sur ce site), existants ou à venir, l’Inria et Simulog, en collaboration étroite, proposent différentes solutions permettant des mises à disposition, des évaluations, des transferts de technologie ou des ventes (sous des formes adaptées).

Les différents logiciels (ensemble de programmes autonomes) ou modules (ensemble de programmes à intégrer dans un logiciel) sont présentés par ordre alphabétique dans le tableau ci-dessus et dans la description rapide qui suit.

5.1 Logiciel Bamg

Participant : Frédéric Hecht [correspondant].

Mots clés : maillage, triangle, quadrangle, adaptation de maillage, isotrope, anisotrope.

Bamg est un générateur de maillages bidimensionnels isotropes ou anisotropes. Il permet de construire un maillage à partir d’une géométrie (une frontière) ou de construire un maillage adapté en partant d’un maillage précédent et en se donnant une solution ou une métrique. Il permet aussi, dans ce cas, d’interpoler sur le maillage créé les solutions, dans le cas P^1 , définies sur le maillage précédent.

Une géométrie est définie par un maillage de contours : une liste de sommets, une liste d’arêtes et des informations sur la continuité G^1 souhaitée. Ce logiciel est décrit sur le site :

<http://www-rocq.inria.fr/gamma/cdrom/www/bamg>.

5.2 Logiciel BL2D

Participants : Patrick Laug [correspondant], Houman Borouchaki [correspondant].

Mots clés : maillage, triangle, quadrangle, adaptation de maillage, isotrope, anisotrope.

Le logiciel BL2D crée des maillages bidimensionnels isotropes ou anisotropes. Il peut être intégré dans un processus adaptatif. Son architecture logicielle est modulaire et deux compo-

sants jouent un rôle central. Le premier discrétise des courbes dans l'espace \mathbb{R}^2 . Le second maille des domaines dans l'espace \mathbb{R}^2 . Ce mailleur est de type Delaunay généralisé. Ce logiciel est disponible sur le site :

<http://www-rocq.inria.fr/gamma/cdrom/www/bl2d>.

5.3 Logiciel BLMESH

Participants : Patrick Laug [correspondant], Houman Borouchaki [correspondant].

Mots clés : maillage, triangle, quadrangle, adaptation de maillage, isotrope, anisotrope, géométrie variable, élément P^1 , élément P^2 , élément Q^1 , élément Q^2 .

Ce logiciel est issu du logiciel BL2D mais offre des possibilités plus nombreuses. Il crée des maillages isotropes ou anisotropes dans le plan, peut être intégré dans un processus adaptatif, et peut traiter des frontières déformables.

La méthode de maillage est de type Delaunay ou frontale. Dans ce dernier cas, la génération des points internes suit une logique frontale, et leur connexion est réalisée comme dans une approche Delaunay classique. L'obtention de quadrangles est faite par appariement. La construction directe d'éléments de degré 2 est rendue possible via le contrôle du maillage des frontières du domaine, de façon à assurer la compatibilité désirée. Les nœuds milieux frontières sont placés en fonction de l'abscisse curviligne. Les nœuds milieux internes sont, en principe, les milieux des arêtes correspondantes.

La diffusion de ce logiciel est liée à des accords de transfert.

5.4 Logiciel BLSURF

Participants : Patrick Laug [correspondant], Houman Borouchaki [correspondant].

Mots clés : maillage de surface, triangle, quadrangle, adaptation de maillage, isotrope, anisotrope, élément P^1 , élément P^2 , élément Q^1 , élément Q^2 .

Le logiciel BLSURF, [23], [22], permet le maillage de surfaces composées de carreaux paramétrés. Plusieurs types de carreaux ont été prédéfinis (sphériques, cylindriques, toriques, de Bézier, B-spline et NURBS). Ce mailleur surfacique est basé sur une méthode indirecte. On maille les domaines des paramètres puis on reporte ces maillages sur la surface en assurant la compatibilité au niveau des interfaces. Les maillages dans \mathbb{R}^2 sont gouvernés par les propriétés géométriques des carreaux et sont, en général, anisotropes. Les techniques utilisées sont les mêmes que dans le logiciel BLMESH (que ce code utilise en partie).

La diffusion de ce logiciel est liée à des accords de transfert.

5.5 Logiciel Emc2

Participants : Frédéric Hecht [correspondant], Eric Saltel.

Mots clés : maillage, CAO, triangle, quadrangle, triangulation automatique.

Emc2 est un logiciel portable, graphique et interactif d'édition de maillages et de contours en deux dimensions. Il permet de générer interactivement des maillages bidimensionnels pour la méthode des éléments finis en définissant la géométrie (D.A.O), la discrétisation des contours, les sous-domaines et les numéros de référence (afin d'introduire un lien avec la physique, *i.e.*, les conditions aux limites et les propriétés des matériaux). Les maillages, formés de triangles ou de quadrangles, sont essentiellement de type grille ou de type Delaunay.

Il est possible d'éditer un maillage en ajoutant, supprimant, déplaçant des sommets, etc. et en lui appliquant des transformations affines (symétrie, rotation, etc). Ce logiciel est décrit sur le site :

<http://www-rocq.inria.fr/gamma/cdrom/www/emc2>.

5.6 Logiciel FreeFem+

Participants : Frédéric Hecht [correspondant], Olivier Pironneau [correspondant], Emmanuel Geay.

Mots clés : maillage, triangle, élément fini, adaptation de maillage, E.D.P., C++.

FreeFem+ est une implémentation d'un langage dédié aux éléments finis qui permet de résoudre des équations aux dérivées partielles simplement sur différents maillages. Il permet aussi de faire de l'adaptation de maillages. Le logiciel a été porté sous les environnements Unix, MacOS et Windows. Ce logiciel est décrit sur le site :

<http://www-rocq.inria.fr/gamma/cdrom/www/FreeFem>.

De plus, une version du logiciel a été interfacée avec le logiciel Scilab (INRIA-Rocquencourt, projet META2), ce qui permet de résoudre des problèmes faisant intervenir des méthodes d'automatique et des méthodes d'éléments finis.

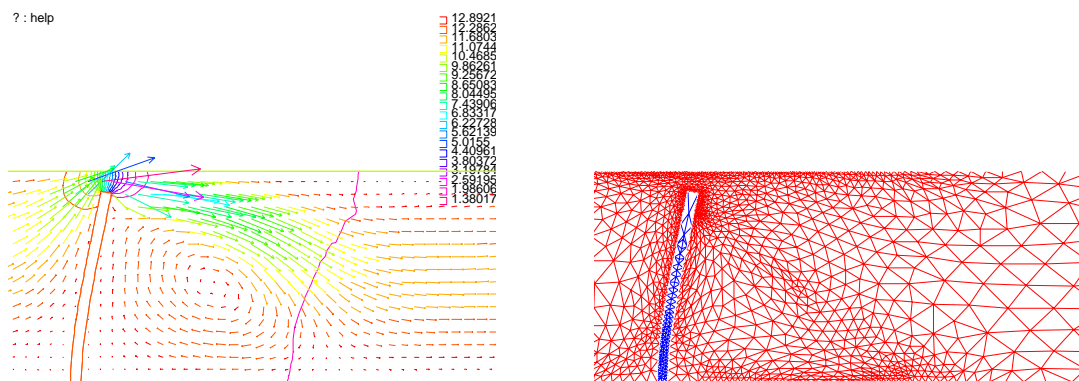


FIG. 1 – Exemple d'interaction fluide-structure en deux dimensions (FreeFem+).

5.7 Logiciel GAMHIC3D

Participants : Houman Borouchaki, Paul Louis George [correspondant], Frédéric Hecht, Éric Saltel.

Mots clés : maillage isotrope contrôlé, tétraèdre, triangulation automatique.

GAMHIC3D, [15] est un module de maillage automatique en tétraèdres d'un domaine défini par une discrétisation (en principe en triangles) de sa surface. Ce module est une extension du module GHS3D au cas d'un problème de maillage contrôlé. On se donne donc une *carte de métriques isotrope* (des tailles) définie de manière discrète aux sommets d'un *maillage de fond*. Le but est alors, partant d'un maillage de la frontière du domaine réputé conforme vis-à-vis de la carte spécifiée, de construire un maillage volumique correspondant conforme à cette même carte.

La diffusion de ce module est liée à des accords de transfert.

5.8 Logiciel GHS3D

Participants : Paul Louis George [correspondant], Frédéric Hecht, Éric Saltel.

Mots clés : maillage, tétraèdre, triangulation automatique.

GHS3D, alias TetMesh-GHS3D, [9], est un module de maillage automatique en tétraèdres d'un domaine défini par une discrétisation (en principe en triangles) de sa surface.

La diffusion de ce module est liée à des accords de transfert. Notons que ce module est déjà intégré dans un certain nombre de codes commerciaux largement diffusés.

5.9 Logiciel YAMS

Participant : Pascal Frey [correspondant].

Mots clés : maillage de surface, décimation, simplification, optimisation.

YAMS est un logiciel destiné au remaillage adapté des maillages de surfaces. La donnée est une triangulation de surface, sur laquelle sont appliquées des modifications topologiques (bascules d'arêtes) et géométriques (bougé de points, création/suppression de sommets). Le but est d'obtenir un maillage simplifié (ou enrichi) correspondant à une carte de tailles donnée (de nature géométrique et/ou physique).

La diffusion de ce module est liée à des accords de transfert.

6 Résultats nouveaux

6.1 Maillage de surfaces paramétrées

Participants : Houman Borouchaki, Patrick Laug.

Résumé : *L'objectif est de mailler des surfaces composées de carreaux paramétriques conformes. L'approche retenue est une approche indirecte. On maille d'abord les domaines de paramètres (en tenant compte des propriétés géométriques des carreaux) et on reporte ensuite les maillages anisotropes ainsi obtenus sur la surface, en assurant la compatibilité des interfaces.*

Mots clés : surface paramétrée, maillage anisotrope, adaptation de maillage.

On distingue le cas particulier des domaines composés à partir de sphères (utilisés pour des applications en chimie) des domaines paramétrés quelconques.

6.1.1 Surfaces composées quelconques

Le problème est de construire des maillages *constraints* de surfaces composées de carreaux paramétrés conformes, où les contraintes sont, d'une part, le respect d'un champ de métriques donné et, d'autre part, la qualité en forme des éléments. La première contrainte indique que le maillage doit respecter localement des tailles (qui peuvent être différentes selon les directions) en chacun de ses sommets et la deuxième exige que les éléments soient aussi réguliers que possible. Rappelons que le maillage d'un carreau (ou d'une nappe) paramétré (qui par défaut est une triangulation de la surface dont tous les sommets appartiennent à la surface) doit vérifier deux propriétés fondamentales :

- \mathcal{P}_1 : chaque élément doit être proche de la surface et
- \mathcal{P}_2 : chaque élément doit être proche des plans tangents en ses sommets.

La première propriété \mathcal{P}_1 indique que l'écart entre le maillage et la surface peut être borné. Cet écart représente la plus grande distance entre un élément et la surface. La seconde propriété \mathcal{P}_2 traduit localement la continuité d'ordre G^1 de la surface. Un élément est proche du plan tangent en l'un de ses sommets si l'écart angulaire entre l'élément et le plan tangent en ce sommet à la surface peut être borné.

La méthode que l'on propose [17], [13] est une méthode classique qui comprend deux étapes. Il s'agit dans un premier temps de discrétiser les interfaces des carreaux dans \mathbb{R}^3 (première étape) puis de reporter ces discrétisations dans les domaines des paramètres pour générer le maillage de chaque carreau via son domaine des paramètres (deuxième étape), à partir de la discrétisation de sa frontière. Naturellement, ces maillages sont gouvernés par des champs de métriques adéquats de telle manière que les maillages résultants surfaciques :

- vérifient les deux propriétés \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 et
- respectent les requis en termes de métriques et de formes d'éléments.

Cette année, nous avons expérimenté et validé le mailleur surfacique BLSURF, qui génère le maillage d'une surface composée de plusieurs carreaux paramétrés en respectant un champ de tailles spécifiées (cf. section Logiciels).

6.1.2 Surfaces moléculaires (sphériques ou toriques)

Les surfaces moléculaires sont maintenant largement utilisées pour des simulations numériques dans le domaine de la chimie. Pour une molécule donnée, plusieurs types de surfaces sont définis, notamment la surface de Van der Waals (VWS), la surface accessible au solvant (SAS) et la surface exclue au solvant (SES). Les surfaces VWS et SAS, qui sont formées uniquement de carreaux sphériques, ont été traitées précédemment. Cette année, nous avons poursuivi nos études sur les surfaces SES, qui comprennent à la fois des carreaux sphériques et toriques.

La qualité des maillages générés par notre méthode permet d'améliorer les performances des modèles utilisés en chimie, voire même d'aborder de nouveaux types de problèmes.

6.2 Maillage de surfaces discrètes

Participants : Pascal Frey, Éric Saltel.

Mots clés : surface discrète, décimation, remaillage, optimisation.

Résumé : *Le but est de remailler une surface en tenant compte des propriétés géométriques de celle-ci (courbures, etc.) et éventuellement d'une carte de métriques (tailles et/ou directions). La surface est définie, du point de vue géométrique, par un maillage (i.e., de manière discrète) éventuellement enrichi d'informations sur les singularités (points singuliers, arêtes vives) présentes et de toutes autres informations disponibles (normales, par exemple).*

Cette étude poursuit le travail des années passées sur ce thème et s'appuie sur des résultats obtenus précédemment, notamment [12], et a conduit au développement du logiciel YAMS.

L'objectif visé est d'extraire, à partir d'une triangulation, un maillage qui est une approximation géométrique (linéaire par morceaux) de la surface et qui comporte moins d'éléments (si possible) que la donnée initiale. Les domaines d'applications concernés sont multiples et vont de la visualisation graphique (maillages *géométriques*) à la simulation numérique par des méthodes d'éléments finis (maillages *de calcul*). Les contraintes en termes de qualité (*aspect ratio*) des éléments et de taille (nombre d'éléments) du maillage résultant dépendant généralement de l'application envisagée, le logiciel propose plusieurs options de simplification et/ou d'enrichissement.

Toutefois, quelle que soit l'application envisagée, un contrôle rigoureux de l'écart entre le maillage et la surface sous-jacente est fondamental. Cet écart correspond localement (pour un triangle) à la distance maximale de cet élément à la surface. Un maillage *géométrique* est donc un maillage satisfaisant cette contrainte (c'est-à-dire bornant l'écart correspondant).

Simplification. En principe, la simplification d'un maillage est gouvernée par les propriétés intrinsèques de la surface sous-jacente et éventuellement par une métrique (isotrope). Celle-ci correspond à un champ de tailles scalaire associé aux sommets de la triangulation initiale. L'appauvrissement de la triangulation est une opération itérative qui consiste à analyser les arêtes du maillage courant et à supprimer celles jugées trop petites (au regard de la carte de tailles). Ces modifications sont couplées avec des bascules d'arêtes et des bougés de points

(de manière à contrôler la qualité en forme des éléments). Dans cette approche, l'opération de réduction d'une arête n'est effectuée que si la qualité et la régularité du maillage courant est préservée (ou pas trop altérée). L'algorithme de simplification de maillage est basé sur deux types d'approches :

1. l'analyse des propriétés intrinsèques de la surface (courbures locales) qui permet de construire une carte (géométrique) de tailles associés aux sommets du maillage donné. À partir de celle-ci, les arêtes de la triangulation sont analysées itérativement et celles dont la longueur est jugée trop petite (par rapport à la spécification) sont supprimées tandis que les arêtes jugées trop longues sont subdivisées en plusieurs sous-segments. Dans cette approche, la déviation des arêtes par rapport au plan tangent moyen en chaque sommet est contrôlé.
2. la surface est simplifiée en préservant la géométrie. Dans ce cas, l'écart maximal entre les éléments de la surface résultante et ceux de la surface initiale est contrôlé. Cette approche est utile, notamment dans le cas de données bruitées (qui peuvent fausser l'évaluation des propriétés intrinsèques de la surface) ou si l'utilisateur désire définir une géométrie (*i.e.*, un maillage servant de support géométrique).



FIG. 2 – Application de la simplification géométrique à la visualisation graphique (la complexité du modèle dépend de sa position relative dans la scène).

Enrichissement. Dans certains cas, la carte de tailles (spécifiée ou intrinsèque) indique que la densité des éléments est localement insuffisante. Il faut donc *enrichir* le maillage en ajoutant des sommets. Ceci est fait en subdivisant les arêtes trop longues. À cette fin, un support géométrique est construit en interne de manière à définir une surface Σ globalement

de continuité G^1 . Ce support va servir à émuler le rôle d'un modéleur géométrique et, en particulier, va servir à répondre aux requêtes suivantes :

- étant donné un point et une direction, trouver le point de Σ le plus proche,
- trouver la normale en un point de Σ .

Dans l'approche retenue, on définit un réseau de courbes frontières aux triangles ainsi que les plans tangents transversaux à celles-ci, indépendamment les uns des autres, par interpolation des normales à la surface aux points [12].

Maillage anisotrope. Un autre volet de cette étude porte sur la création de maillages anisotropes. Dans ce contexte, les opérations de remaillage classiques sont très sensibles à la définition de la surface qui sert de support géométrique. C'est pourquoi nous avons introduit certains pré-traitements afin d'améliorer la qualité des géométries.

En particulier, pour éliminer le "bruit" dans une bande d'épaisseur donnée autour de la surface initiale, nous utilisons un critère basé sur une distance locale de Hausdorff entre les triangles du maillage courant et ceux du maillage initial. Ce critère, qui définit une métrique, permet de préserver les courbures de la surface. Des points sont ensuite ajoutés de manière à améliorer la qualité en taille des triangles résultants.

6.3 Surfaces Delaunay admissibles

Participants : Philippe Pebay, Pascal Frey, Houman Borouchaki, Paul Louis George.

Mots clés : surface Delaunay admissible.

Résumé : *On établit si une triangulation de surface est Delaunay admissible ou non. Dans ce dernier cas, on propose une méthode permettant de rendre, par modifications locales, cette triangulation de surface Delaunay conforme.*

L'application d'un mailleur tridimensionnel de type Delaunay aux sommets de la triangulation d'une surface ne conduit pas, en général, au respect de cette triangulation (il existe des triangles de la surface qui ne sont pas des faces des tétraèdres ainsi construits) sauf si cette triangulation de surface est Delaunay admissible. Cette notion se traduit par un ensemble de contraintes géométriques que doivent satisfaire les éléments de la triangulation donnée.

On propose une méthode, basée sur des modifications locales, permettant de transformer une triangulation de surface quelconque afin de la rendre Delaunay admissible (ou Delaunay conforme).

Les applications de cette étude sont multiples. Outre le fait que l'on simplifie ainsi le travail du mailleur tridimensionnel utilisé pour mailler le domaine défini par la surface, on peut appliquer cette technique à la création de squelette (axe médian ou surface moyenne ou encore fibre neutre). Cette application ouvre, par ailleurs, la voie à une méthode de génération de maillages hexaédriques (non structurés) pour des domaines de géométrie arbitraire.

Le travail de cette année finit le travail de thèse de P. Pebay. Après avoir étudié le cas d'un ensemble d'arêtes en deux dimensions, on a regardé le cas d'arêtes en trois dimensions puis le cas de faces triangulaires. Des résultats d'existence ou de non existence ont été prouvés. Un algorithme convergeant en deux dimensions a été développé. Un algorithme heuristique a été proposé pour la dimension trois.

6.4 Maillage plan

Participants : Houman Borouchaki, Patrick Laug.

Mots clés : maillage plan, méthode de Delaunay, méthode frontale.

Résumé : *On propose une nouvelle méthode de génération de maillages plans basée sur une approche combinée Delaunay-frontale. Il s'agit de définir les points internes par une méthode frontale et d'établir les connexions entre ceux-ci par une méthode de Delaunay généralisée. L'originalité de la méthode réside d'une part dans la gestion du front à partir duquel les points internes sont construits, et d'autre part dans la construction même de ces points internes dans le cas général anisotrope.*

Le schéma de génération du maillage reste classique : un maillage grossier (sans point interne) du domaine est construit, puis enrichi par des points internes et enfin optimisé. Les points internes sont définis de manière itérative. À chaque itération, un ensemble d'arêtes du maillage courant, qui constitue le front, est retenu et les points internes :

- sont générés à partir du front de manière à former des triangles unité, et
- sont insérés dans le maillage courant en utilisant le noyau de Delaunay contraint (processus permettant l'insertion d'un point dans un maillage) appliqué dans un contexte riemannien.

Ce processus est répété tant que le maillage courant est modifié.

Une arête du maillage courant est considérée comme élément du front si elle sépare un triangle unité d'un triangle non unité. Un soin particulier doit être apporté pour remplir correctement le domaine. En effet, un triangle non unité peut être amené à être considéré comme unité. Le point optimal par rapport à une arête du front est défini, du même côté que le triangle non unité associé, de manière à former un triangle unité avec le front. En pratique, pour définir le point optimal P par rapport à une arête AB du front, on :

- calcule P_a (resp. P_b) tel que le triangle ABP_a (resp. ABP_b) soit équilatéral dans la métrique $\mathcal{M}_2(A)$ (resp. $\mathcal{M}_2(B)$) et on pose $P = \frac{P_a + P_b}{2}$.
- ajuste itérativement la position de P en :
 - posant $P_a = A + \frac{\overrightarrow{AP}}{L(AP)}$ (resp. $P_b = B + \frac{\overrightarrow{BP}}{L(BP)}$), où $L(AP)$ (resp. $L(BP)$) est la longueur de l'arête AP (resp. BP) dans la métrique riemannienne \mathcal{M}_2 .

$$- \text{ posant } P = \frac{P_a + P_b}{2}.$$

Les longueurs $L(AP)$ et $L(BP)$ sont approchées à l'aide d'une formulation quadratique de Simpson avec adaptation. Le point optimal P est généré s'il appartient au domaine et s'il n'est pas trop proche d'un point déjà existant.

Cette étude est détaillée dans [13] et [10].

6.5 Frontières déformables - forgeage

Participants : Houman Borouchaki, Patrick Laug.

Mots clés : maillage plan, frontière déformable, forgeage.

Résumé : *Nous proposons une méthode pour traiter un objet soumis à de grandes déformations, par exemple lors du forgeage d'une pièce. Un maillage initial est fourni à un code de calcul, de manière à obtenir des déplacements en chaque point. Lorsque les déformations deviennent trop importantes, le domaine est re-maillé en tenant compte des nouvelles caractéristiques de sa géométrie, et les calculs se poursuivent itérativement.*

Dans certaines applications, les objets présentent de grandes déformations. Le maillage déformé présente alors des éléments de mauvaise qualité ou d'aire négative. Nous nous plaçons ici dans le contexte du forgeage, où un outil vient donner une certaine forme à une pièce malléable. On suppose que l'outil est soumis, de manière incrémentale, à des déplacements verticaux δ . Les principales étapes de notre méthode consistent à :

- Générer une discrétisation géométrique de la frontière de l'outil.
- Générer une discrétisation géométrique de la frontière de la pièce et un maillage de son domaine.
- Tester si "l'outil approche de la pièce". Pour cela, on considère chaque point P de la discrétisation de l'outil. Si P est à l'intérieur d'un rectangle de diamètre AB et d'épaisseur δ , où AB est une arête de la discrétisation de la pièce, alors la taille prescrite aux points A et B est la taille géométrique au point P .
- Tester si "la pièce approche de l'outil". À présent, on considère chaque point P de la discrétisation de la pièce. Si P est à l'intérieur d'un rectangle de diamètre AB et d'épaisseur δ , où AB est une arête de la discrétisation de l'outil, alors la taille prescrite au point P est le minimum des tailles géométriques aux points A et B .
- Remailler la pièce en utilisant cette nouvelle carte, si celle-ci est "très différente" de l'ancienne.

La Figure 3 montre un exemple de simulation numérique de forgeage d'une pièce 2D. Cet exemple a été réalisé en collaboration avec Abdelhakim Cherouat (UTT) à l'aide du mailleur BLMESH et du code de calcul ABAQUS.

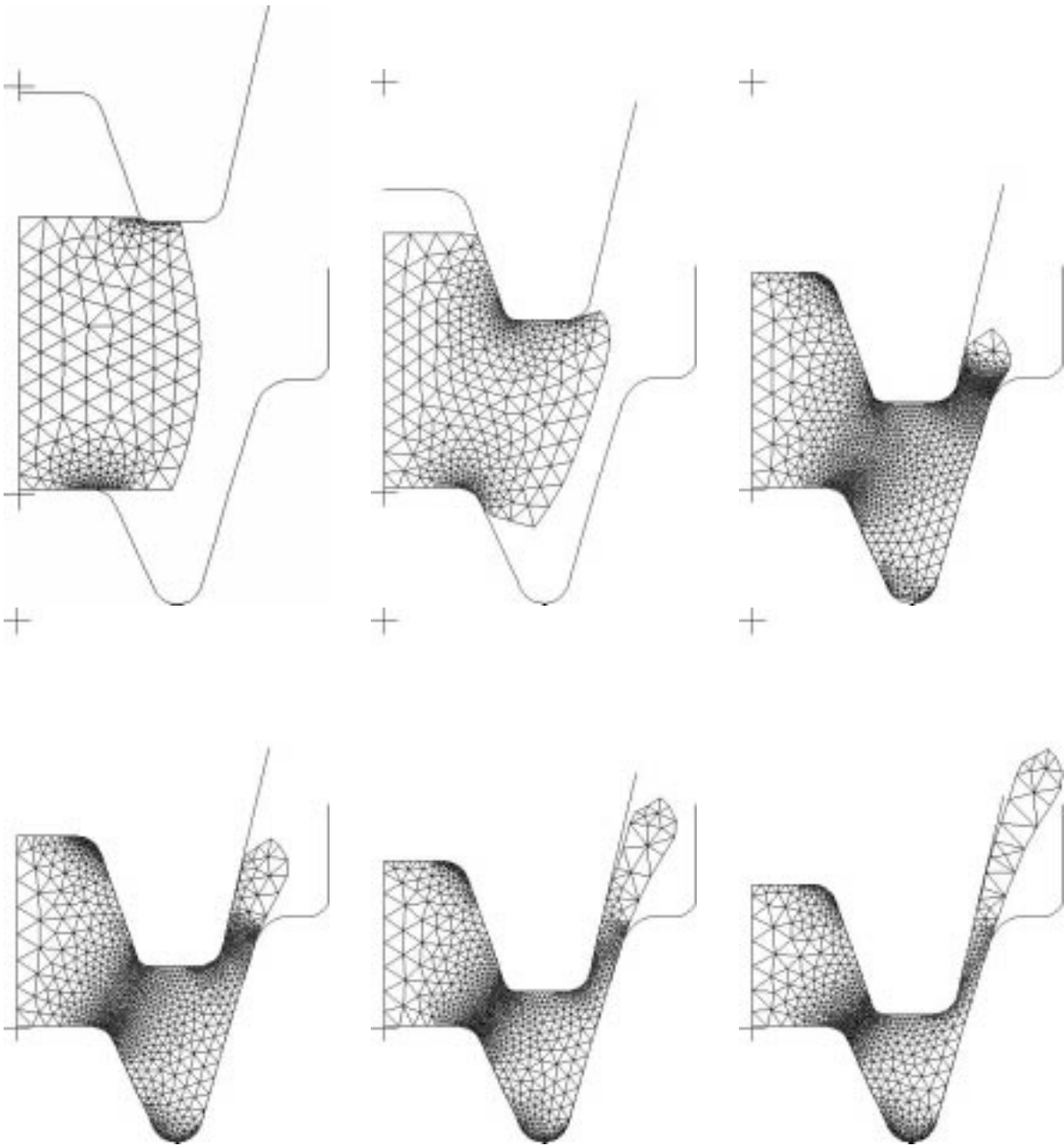


FIG. 3 – Simulation numérique de forgeage d'une pièce 2D. En haut : étapes 0, 20 et 40. En bas : étapes 60, 80 et 100.

6.6 Maillage volumique

Participants : Houman Borouchaki, Pascal Frey, Paul Louis George, Rachid Ouachtaoui.

Mots clés : Delaunay, maillage isotrope, maillage contrôlé.

Résumé : *La méthode de type Delaunay "classique" (module GHS3D) utilise une nouvelle méthode de création des points internes. Une méthode de type Delaunay gouverné a été développée (module GAMHIC3D) dans laquelle le contrôle est isotrope (taille des mailles).*

La méthode de création des points internes du mailleur GHS3D, [21], a été modifiée de manière à minimiser le nombre de tétraèdres résultants tout en reflétant mieux la nature des seules données initiales connues (le maillage de la surface du domaine). L'idée de base est de coupler la méthode utilisée auparavant (en se basant sur les arêtes) avec une stratégie de type frontale.

Le mailleur gouverné GAMHIC3D, [19], [15], [11], par une approche de type Delaunay et par introduction de la notion de longueur unité, permet de construire un maillage d'un domaine quelconque vérifiant au mieux un champ de tailles spécifié en entrée. Ce champ est fourni via un *espace de contrôle*, c'est-à-dire un maillage de fond et des tailles en ses sommets. Les points internes du maillage construit sont placés sur les arêtes du maillage courant à une distance un les uns des autres. Cette distance unité est mesurée dans le champ de métrique spécifié. La méthode a été validée sur des exemples académiques où la fonction de tailles est connue de façon analytique et utilisée de façon discrète (aux sommets du maillage de fond). Des validations sur des exemples réels issus de la mécanique du solide ou de la mécanique des fluides sont en cours dans lesquels la fonction de tailles est obtenue par un estimateur d'erreurs analysant les solutions calculées aux différents pas d'un processus de calculs adaptatifs.

6.7 Publication générale

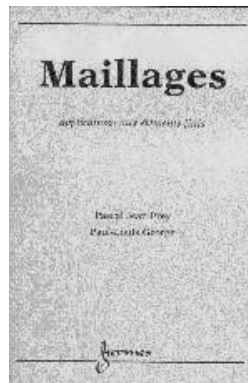
Participants : Pascal Frey, Paul Louis George.

Mots clés : triangulation, maillage.

Résumé : *Publication en français et traduction en anglais d'un livre sur les différentes méthodes de génération, modifications, optimisation et adaptation de maillage.*

Un nouveau livre destiné à remplacer la référence [8], a été écrit. Dans cet ouvrage, sont abordés les différentes techniques de constructions de maillages, les outils de modification, d'évaluation et d'optimisation ainsi que les méthodes de construction de maillages adaptés ou les aspects liés au parallélisme. Outre l'étude théorique des méthodes sont examinés de nombreux aspects pratiques (structures et algorithmes de base, par exemple). Des personnes extérieures au projet Gamma ont contribué à ce livre, parmi lesquelles F. Noël (Université de

Grenoble), F. Cazals (projet Prisme, Inria-Sophia) et M. Lorient (Simulog). Les exemples ont été fournis par les membres du projet ou par le biais de collaborateurs extérieurs.



7 Contrats industriels (nationaux, européens et internationaux)

7.1 Simulog

Résumé : *Simulog, filiale de l'Inria, est, par contrat, chargée de la diffusion des codes développés initialement dans le projet Gamma. À ce titre, Simulog effectue des opérations de commercialisation et de transfert de technologie de maillages.*

Simulog s'occupe de la commercialisation des maillages surfaciques et volumiques et participe à la validation puis à l'industrialisation des codes correspondants.

7.2 Dassault Aviation

Résumé : *Mise à disposition des modules de maillage et remaillage des surfaces.*

Cette collaboration s'inscrit dans le cadre de la thèse de O. Roques (dans le cadre d'une convention CIFRE).

7.3 Dassault Systèmes

Résumé : *Mise à disposition du module GHS3D, mailleur libre en trois dimensions, pour évaluation.*

L'évaluation ayant été faite, des propositions de collaboration sur les aspects tridimensionnels et sur les problèmes de maillages de surfaces sont en cours. Dassault Systèmes est l'éditeur du produit CATIA.

7.4 EDF

Intégration des modules de construction de maillages adaptés (isotropes ou anisotropes en deux dimensions, isotropes en trois dimensions) dans une boucle de calcul dédiée à la simulation numérique par éléments finis de problèmes de mécanique des fluides (code N3S) en "incompressible". Ce travail constitue la thèse de R. Ouachtaoui.

7.5 SNECMA

Poursuite d'une thèse, D. Leservoisier, ayant trait aux calculs en trois dimensions de problèmes de mécanique des fluides comportant une forte anisotropie. Mise à disposition des maillages GHS3D (cas classique), GAMHIC3D (mailleur contrôlé isotrope) et développement d'un prototype, GAMANIC3D (mailleur contrôlé anisotrope). Thèse en collaboration avec le projet Sinus (INRIA-Sophia), [16].

8 Actions régionales, nationales et internationales

8.1 Actions européennes

8.1.1 Projet Magic-Feat

Participants : E. Saltel, P.L. George, F. Hecht.

Mots clés : Simulation, processus, fabrication, semi-conducteurs.

Ce contrat européen est en phase de stipulation. Il devrait couvrir les 3 années à venir.

8.2 Actions nationales

8.2.1 Action en EEG

Participants : P.L. George, P. Frey.

Mots clés : EEG.

Cette action concerne la simulation des champs électriques dans le cerveau. Elle regroupe plusieurs projets INRIA (sous la direction de O. Faugeras) et une équipe du Cermics. La contribution de Gamma porte sur la mise à disposition des logiciels de maillages de surfaces et de volumes nécessaires aux simulations envisagées.

8.3 Visites et invitations de chercheurs

Participant : S.H. Lo.

S.H. Lo, professeur à l'université de Hong-Kong, a passé 6 mois dans le projet Gamma. Une étude a été conduite sur une méthode permettant de contraindre un maillage de surface dans un maillage volumique, [14]. La méthode repose sur le calcul de l'intersection du maillage volumique construit avec la surface donnée.

9 Diffusion de résultats

9.1 Participation à des colloques, séminaires, invitations

9.1.1 Paul Louis George

- “Mesh generation”, ISFMA symposium on Computational Aerodynamics, Xi’an, Chine, [20], sept. 1999.
- “Maillage autoadaptatif de surfaces et de volumes”, Journées Cetim, Senlis, [18], sept. 1999.
- “Mesh generation by means of a Delaunay type method. Application to adaptive meshing”, Queen University, Belfast, juin 1999.

9.1.2 Frédéric Hecht

- “Mesh adaption for CFD”, conférence au CTR (Center Turbulent Research, Université de Stanford, CA, USA), août 1999.
- “Introduction of FreeFem+ software”, conférence invitée à l’Université de Davis (UC Davis, CA, USA), août 1999.
- “Interaction fluide-structure avec FreeFem+”, conférence de clôture du GDR fluides en interaction, Sophia-Antipolis.
- “Estimateur d’erreur et adaptation de maillages”, groupe de travail UPMC-LAN, Paris.

9.1.3 Patrick Laug

- “Maillage surfacique 3D et application aux surfaces moléculaires”, INRIA Nancy, nov. 1998.
- “Maillage de surfaces paramétrées”, Université de Technologie de Troyes, juin 1999.
- “About Parametric Surface Meshing” (avec H. Borouchaki), Trends in Unstructured Mesh Generation, USNCCM’99, Boulder, CO, août 1999.

9.2 Enseignement

- F. Hecht donne un cours de DEA à Paris 6, C++ et éléments finis.
- P. Laug donne au Pôle Universitaire Léonard de Vinci un cours (18h) sur la programmation en Fortran 90.
- P. Frey donne au Pôle Universitaire Léonard de Vinci un cours (40h) sur les techniques de maillages pour des méthodes d’éléments finis.

10 Bibliographie

Ouvrages et articles de référence de l'équipe

- [1] H. BOROUCAKI, P.L. GEORGE AND B. MOHAMMADI, «Delaunay mesh generation governed by metric specifications. Part 2: Application examples», *Finite Elements in Analysis and Design* 25, 1997, p. 85–109.
- [2] H. BOROUCAKI, P.L. GEORGE, F. HECHT, P. LAUG AND E. SALTEL, «Delaunay mesh generation governed by metric specifications. Part 1: Algorithms», *Finite Elements in Analysis and Design* 25, 1997, p. 61–83.
- [3] P.J. FREY AND P.L. GEORGE, *Meshing. Applications to Finite Elements*, Hermès Science Publications, Paris (Springer), 1999.
- [4] P.J. FREY ET P.L. GEORGE, *Maillages. Applications aux éléments finis*, Hermès Science Publications, Paris, 1999.
- [5] P.L. GEORGE AND H. BOROUCAKI, *Delaunay triangulation and meshing. Application to finite elements*, Hermès Science Publications, Paris, 1998.
- [6] P.L. GEORGE ET H. BOROUCAKI, *Triangulation de Delaunay et maillage. Applications aux éléments finis*, Hermès Science Publications, Paris, 1997.
- [7] P.L. GEORGE, F. HECHT AND E. SALTEL, «Automatic mesh generator with specified boundary», *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg* 92, 1991, p. 269–288.
- [8] P.L. GEORGE, *Génération automatique de maillages. Applications aux méthodes d'éléments finis*, *RMA 16*, Masson, 1991.
- [9] P.L. GEORGE, «Improvement on Delaunay based 3D automatic mesh generator», *Finite Elements in Analysis and Design* 25, 1997, p. 297–317.

Livres et monographies

- [10] P.L. GEORGE ET *al.*, *Maillages in Traité Mécanique et Ingénierie des Matériaux, Méthodes Numériques*, P.L. George (Eds), Hermès Science Publications, Paris, à paraître.

Articles et chapitres de livre

- [11] B. MOHAMMADI, P.L. GEORGE, F. HECHT ET E. SALTEL, «3D Mesh Adaptation by Metric Control for CFD», *Revue européenne des éléments finis*, soumis à.
- [12] H. BOROUCAKI ET P.J. FREY, «Maillage géométrique des surfaces», *Revue Européenne des Éléments Finis* 8, 1999, p. 47–75.
- [13] H. BOROUCAKI, P. LAUG AND P.L. GEORGE, «Parametric Surface Meshing Using a Combined Advancing-Front Generalized-Delaunay Approach», *Int. j. numer. methods eng.*, à paraître.
- [14] H. BOROUCAKI, S.H. LO AND P.L. GEORGE, «Boundary enforcement by facet splits in Delaunay based mesh generation», *Int. j. numer. methods eng.*, à paraître.
- [15] P.L. GEORGE ET H. BOROUCAKI, «Génération automatique de maillages tridimensionnels respectant une carte de taille», *Revue Européenne des Éléments Finis* 7, 1999, p. 339–363.

Communications à des congrès, colloques, etc.

- [16] D. LESERVOISIER, A. DERVIEUX, P.L. GEORGE AND O. PENANHOAT, « Application of mesh adaptive techniques to mesh convergence in complex CFD », *in : 2nd Int. Symposium on Finite volumes for complex applications*, Duisbourg, Germany, july 1999.
- [17] H. BOROUCAKI, P. LAUG AND P.L. GEORGE, « About parametric surface meshing », *in : 2nd Symposium on Trends in Unstructured Mesh Generation*, University of Colorado, Boulder, CO, USA, june 1999.
- [18] P.L. GEORGE *et al.*, « Maillage autoadaptatif de surfaces et de volumes », *in : Journées Cetim*, Senlis, sept. 1999.
- [19] P.L. GEORGE, « Automatic 3D Mesh Generation conforming a Prescribed Size Map », *in : Numerical grid generation in computational Field Simulations*, p. 21–32, Greenwich, UK, june 1999.
- [20] P.L. GEORGE, « Mesh generation », *in : ISFMA symposium on Computational Aerodynamics*, Xi'an, Chine, sept. 1999.
- [21] P.L. GEORGE, « Tet meshing: Construction, Optimization and Adaptation », *in : 8th Int. Meshing Roundtable*, p. 133–141, Lake Tahoe, CA, oct. 1999.

Rapports de recherche et publications internes

- [22] P. LAUG AND H. BOROUCAKI, « BLSURF - Mesh Generator for Composite Parametric Surfaces - User's Manual », *Technical Report n° RT-0235*, INRIA, November 1999, <http://www.inria.fr/RRRT/RT-0235.html>.
- [23] P. LAUG ET H. BOROUCAKI, « BLSURF - Maillage de surfaces composées de carreaux paramétrés - Manuel d'utilisation », *Rapport Technique n° RT-0232*, INRIA, juin 1999, <http://www.inria.fr/RRRT/RT-0232.html>.